Corrigé du DM1

Exercice 1.
Déterminer selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t} dt$.

Correction de l'exercice 1. (5 points).
La fonction $t \mapsto \frac{e^{-at}}{1+e^t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$; les deux bornes de l'intégrale sont incertaines. On écrit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t} dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-at}}{1+e^t} dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t} dt.$$

Comme $\frac{e^{-at}}{1+e^t} \underset{-\infty}{\sim} e^{-at}$, $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-at}}{1+e^t} dt$ est de la même nature que $\int_{-\infty}^{0} e^{-at} dt$. Étudions la nature de cette dernière.
Si $a = 0$, $\int_{-\infty}^{0} e^{-at} dt = \int_{-\infty}^{0} 1.dt = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_{x}^{0} 1.dt = \lim\limits_{x \to -\infty} [t]_x^0 = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$.
Si $a \neq 0$, $\int_{-\infty}^{0} e^{-at} dt = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_{x}^{0} e^{-at} dt = \lim\limits_{x \to -\infty} [-\frac{e^{-at}}{a}]_x^0 = \lim\limits_{x \to -\infty} (-\frac{1}{a} + \frac{e^{-ax}}{a})$. Donc,

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-at} dt = \begin{cases} -\dfrac{1}{a} & \text{si } \ a < 0, \\ +\infty & \text{si } \ a \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

D'autre part, $\frac{e^{-at}}{1+e^t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-at}}{e^t} = e^{-(a+1)t}$, donc $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t} dt$ est de la même nature que $\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+1)t} dt$. Étudions la nature de cette dernière.
Si $a = -1$, $\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+1)t} dt = \int_{0}^{+\infty} 1.dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_{0}^{x} 1.dt = \lim\limits_{x \to +\infty} [t]_0^x = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.
Si $a \neq -1$, $\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+1)t} dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_{0}^{x} e^{-(a+1)t} dt = \lim\limits_{x \to +\infty} [-\frac{e^{-(a+1)t}}{a+1}]_0^x = \lim\limits_{x \to +\infty} (-\frac{e^{-(a+1)x}}{a+1} + \frac{1}{a+1})$.
Donc,

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+1)t} dt = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ a \leq -1, \\ \dfrac{1}{a+1} & \text{si } \ a > -1. \end{cases} \tag{2}$$

Conclusion : D'après (1) et (2) l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t} dt$ converge si et seulement si $a \in]-1, 0[$.

Exercice 2.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_{1}^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est décroissante sur $\mathcal{D}_f$.
3. On admet que f est continue sur $\mathcal{D}_f$.
   (a) Montrer que $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

(b) Justifier que f admet une limite (éventuellement infinie) en 0 et en $+\infty$, et déduire ces limites en utilisant ce qui précède.

Correction de l'exercice 2. (7 points: 2 - 2 - 1 - 2).

1. Le domaine de définition de f est constitué des points x de $\mathbb{R}$ pour lesquels l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$ converge. Pour x fixé, la fonction $t \mapsto \frac{t^{-x}}{1+t}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, il s'agit donc de regarder le problème en $+\infty$.
Comme $\frac{t^{-x}}{1+t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^{-x}}{t} = t^{-(x+1)}$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$ est de la même nature que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}} dt$, qui elle, converge si et seulement si $x + 1 > 1$, c'est-à-dire $x > 0$.
Donc $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.

2. Soient $x, y \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
x \leq y &\implies -x \geq -y \\
&\implies \forall t \geq 1, -x \ln(t) \geq -y \ln(t) \ \ (\text{car } \ln(t) \geq 0 \text{ si } t \geq 1 \text{ }) \\
&\implies \forall t \geq 1, e^{-x \ln(t)} \geq e^{-y \ln(t)} \ \ (\text{car la fonction exponentielle est croissante}) \\
&\implies \forall t \geq 1, t^{-x} \geq t^{-y} \\
&\implies \forall t \geq 1, \frac{t^{-x}}{1+t} \geq \frac{t^{-y}}{1+t} \ \ (\text{car } t+1 > 0).
\end{aligned}$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{-x}}{1+t}$ et $t \mapsto \frac{t^{-y}}{1+t}$ sont continues sur $[1, +\infty[$ et ont toutes les deux une intégrale convergente sur cet intervalle. Par positivité de l'intégrale:

$$\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{t^{-y}}{1+t} dt \\
&\implies f(x) \geq f(y).
\end{aligned}$$

3. (a) Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f(x) + f(x+1) &= \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{-(x+1)}}{1+t} dt \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{t^{-x}}{1+t} + \frac{t^{-(x+1)}}{1+t} \right) dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x} + t^{-(x+1)}}{1+t} dt \\
&= \int_1^{+\infty} t^{-(x+1)} \frac{t+1}{1+t} dt \\
&= [-\frac{1}{x} t^{-x}]_1^{+\infty} \\
&= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

(b) - En 0 : on a $\lim_{x\to 0} f(x+1) = f(1)$ car (on a admis que) f est continue sur son domaine de définition. D'autre part, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. D'après l'égalité de la question précédente, on déduit que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

- En $+\infty$: f est décroissante et minorée par 0, elle admet donc une limite finie l en $+\infty$. En utilisant l'égalité de la question précédente, on a $2l = 0$, donc $l = 0$.

Exercice 3.

1. Donner le DL de la fonction $t \mapsto \ln(\cos(t))$ en 0 à l'ordre 3.

2. En utilisant la question précédente, montrer que l'intégrale suivante converge:

$$\int_2^{+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^3} dx.$$

Correction de l'exercice 3. (4 points: 1.5 - 2.5).

1. Le développement limité de $x \mapsto \cos(x)$ en 0 à l'ordre 3 est $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon_0(x)$ et le développement limité de $t \mapsto \ln(1+t)$ en 0 à l'ordre 3 est $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3\epsilon_1(t)$. En remarquant que lorsque x tend vers 0, $-\frac{x^2}{2} + x^3\epsilon_0(x)$ tend vers 0, on peut poser $t = -\frac{x^2}{2} + x^3\epsilon_0(x)$ et utiliser la composition des DLs. On trouve :

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + x^3\epsilon_2(x).$$

2. La fonction $x \mapsto \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^3}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$ car $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$. Il faut donc regarder le problème en $+\infty$.
On a $\left(\cos(\frac{1}{x})\right)^{x^3} = e^{x^3\ln(\cos(\frac{1}{x}))}$. Or, d'après la question précédente,
$\ln(\cos(\frac{1}{x})) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3}\epsilon_2(\frac{1}{x})$. Donc, $x^3\ln(\cos(\frac{1}{x})) = -\frac{x}{2} + \epsilon_2(\frac{1}{x})$. Finalement,

$$e^{x^3\ln(\cos(\frac{1}{x}))} = e^{-\frac{x}{2}+\epsilon_2(\frac{1}{x})} = e^{-\frac{x}{2}}e^{\epsilon_2(\frac{1}{x})}.$$

Montrons que les fonctions $x \mapsto e^{x^3\ln(\cos(\frac{1}{x}))}$ et $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$. Comme $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$ ne s'annule pas, il suffit de montrer que la limite du rapport $\frac{e^{x^3\ln(\cos(\frac{1}{x}))}}{e^{-\frac{x}{2}}}$ vaut 1 en $+\infty$. Or, par définition de la fonction ϵ_2, $\lim_{x\to+\infty} \epsilon_2(\frac{1}{x}) = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} e^{\epsilon_2(\frac{1}{x})} = 1$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^3\ln(\cos(\frac{1}{x}))}}{e^{-\frac{x}{2}}} = 1.$$

D'où

$$e^{x^3\ln(\cos(\frac{1}{x}))} \underset{+\infty}{\sim} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Finalement, la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^3} dx$ est la même que celle de l'intégrale $\int_2^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = [-2e^{-\frac{x}{2}}]_2^{+\infty} = \frac{2}{e}$. Donc l'intégrale de l'exercice converge.

Exercice 4.
Soit $b \geq 0$ et soit la série de terme général $u_n = \frac{[\sqrt{n}]-[\sqrt{n-1}]}{n^b}, n \geq 1$.

1. Calculer $[\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}]$ selon que n est le carré d'un entier ou non.
2. En déduire qu'on peut écrire $\sum\limits_{n\geq 1} u_n = \sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k^{2b}}$.
3. Conclure selon la valeur de b la nature de la série de terme général u_n.

Correction de l'exercice 4. (4 points: 1.5 - 1.5 - 1)

1. Si n est le carré d'un entier non nul, alors $[\sqrt{n}] = \sqrt{n}$. On remarque que
$$\sqrt{n} - 1 \leq \sqrt{n-1} < \sqrt{n}.$$
Par définition de la partie entière, on en déduit que $[\sqrt{n-1}] = \sqrt{n}-1$, d'où $[\sqrt{n}]-[\sqrt{n-1}] = 1$.
Autrement, on pose $[\sqrt{n}] = k$. On a alors $k < \sqrt{n} < k+1$, donc $k^2 < n < (k+1)^2$, donc $k^2 \leq n-1 < (k+1)^2$.

2. On déduit de la question précédente que
$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^b}, & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}^*, k^2 = n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
En remplaçant n par k^2 dans le premier cas, on retrouve l'égalité demandée.

3. La série de terme général $\frac{1}{k^{2b}}$ est une série de Riemann, donc elle converge si et seulement si $2b > 1$, c'est-à-dire $b > \frac{1}{2}$.