Devoir Maison[1]

Exercice 1.
Déterminer selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t} dt$.

Exercice 2.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est décroissante sur $\mathcal{D}_f$.
3. On admet que f est continue sur $\mathcal{D}_f$.
   (a) Montrer que $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.
   (b) Justifier que f admet une limite (éventuellement infinie) en 0 et en $+\infty$, et déduire ces limites en utilisant ce qui précède.

Exercice 3.

1. Donner le DL de la fonction $t \mapsto \ln(\cos(t))$ en 0 à l'ordre 3.
2. En utilisant la question précédente, montrer que l'intégrale suivante converge:

$$\int_2^{+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^3} dx$$

Exercice 4.
Soit $b \geq 0$ et soit la série de terme général $u_n = \frac{[\sqrt{n}]-[\sqrt{n-1}]}{n^b}, n \geq 1$.

1. Calculer $[\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}]$ selon que n est le carré d'un entier ou non.
2. En déduire qu'on peut écrire $\sum\limits_{n\geq 1} u_n = \sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k^{2b}}$.
3. Conclure selon la valeur de b la nature de la série de terme général u_n.

[1] A rendre au plus tard le 10/10.