Fractions continues

Sujet proposé par Sara Mehidi; sarah.mehidi@math.u-bordeaux.fr

Même si vous n'êtes pas un super-geek, il est vraisemblable que vous connaissiez au moins les quelques premières décimales du nombre π. L'écriture décimale fournit une approximation de nombres réels comme π; par exemple,

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582\ldots$$

Les fractions continues sont une autre manière de représenter et d'approximer des nombres réels, une alternative à l'écriture décimale qui, en fait, constitue un meilleur choix d'approximation.

Si l'on écrit $\pi = 3 + 0,1415926\ldots$, en écrivant $\dfrac{1}{0,1415926\ldots} = 7,062513\ldots$, on peut donc écrire $\pi = 3 + \dfrac{1}{7,062513\ldots}$. En laissant tomber ce qu'il y a après la virgule, on obtient

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

Il s'agit là d'une des premières approximations rationnelles de π connue depuis l'Antiquité !

Maintenant, si on décide de continuer, plutôt que de laisser tomber la partie décimale de $7,062513\ldots$, on écrit $0,062513\cdots \approx 1/15$ et on injecte ça dans notre approximation pour obtenir

$$\pi \approx 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106}$$

On peut continuer à faire ça plusieurs fois de suite et on obtient

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

Remarquons que l'écriture décimale de π donnerait comme approximation, à 10^{-4} près,

$$\pi \approx \frac{31415}{10000}$$

Mais vous voyez qu'il faut aller chercher des dénominateurs et numérateurs très élevés, là où les approximations issues du développement en fraction continue utilisent des nombres bien plus petits. En effet, la deuxième approximation de π que l'on a obtenue, à savoir $\frac{333}{106} = 3.14150943396226$, fournit elle aussi une approximation de π à 10^{-4} près mais en utilisant un numérateur et un dénominateur plus petits.

Dans ce projet, on démontrera que tout réel admet une approximation en fraction continue, puis on étudiera quelques propriétés des fractions continues, ainsi que des applications et des exemples.

Références:

1) Cours sur les fractions continues, université de Montréal.
2) Cours sur les fractions continues, université de Bordeaux, voir §3.