1

Rudiments de logique et de théorie des ensembles

1.1 Opérations logiques

Exercice 1. x est un réel ; on considère les deux propositions suivantes :

- P_1 : "$x \leq 2$"
- P_2 : "$x \geq 0$".

Compléter le tableau suivant en indiquant à chaque fois si la proposition est vraie ou fausse :

	P_1	P_2	P_1 ET P_2	P_1 OU P_2
$x = 3$				
$x = -1$				
$x = 1$				
$x \in [0, 2]$				

Bilan : écrire l'intervalle $[a, b]$ en ne faisant intervenir que des propositions portant sur une inégalité.

Exercice 2. P et Q désignent deux propositions logiques.

1. Construire les tables de vérité des propositions suivantes :
   (a) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
   (b) $(P \Rightarrow Q)$ ou $(Q \Rightarrow P)$
   (c) $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$
2. Simplifier $(\neg(P \Rightarrow \neg Q))$
3. Exprimer sans $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$:
   (a) $\neg(P \Leftrightarrow Q)$
   (b) $\neg((P \vee Q) \Rightarrow Q)$

Exercice 3. Une tautologie est une proposition logique toujours vraie (quelles que soient les valeurs de vérité de ses propositions élémentaires). Soient A et B deux propositions. Les propositions suivantes sont-elles des tautologies ?

1. $(A$ ET (NON $A)) \Rightarrow B$;
2. $A \Rightarrow (A$ ET $B)$;
3. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

Exercice 4. Soient A, B, C, D 4 propositions. On sait que $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ et $B \Rightarrow D$ sont vraies. Que peut-on déduire dans les situations suivantes :

1. On sait que B est vraie.
2. On sait que D est fausse.
3. On sait que B est fausse.

Exercice 5.

1. Laquelle des formules suivantes est équivalente à : $P\ et\ (P\ ou\ Q)$?
   (a) $P\ et\ Q$
   (b) $P\ ou\ Q$
   (c) P
   (d) Q
2. Laquelle des formules suivantes est équivalente à : $(P\ et\ Q)\ ou\ P$?
   (a) $P\ et\ Q$
   (b) $P\ ou\ Q$
   (c) P
   (d) Q

Exercice 6.

1. Quelle est la négation de : $(non\ P)\ et\ Q$?
   (a) $P\ et\ (non\ Q)$
   (b) $P\ ou\ (non\ Q)$
   (c) $(non\ P)\ ou\ Q$
2. Quelle est la négation de : $P\ ou\ (non\ Q)$?
   (a) $(non\ P)\ ou\ Q$
   (b) $(non\ P)\ et\ Q$
   (c) $(non\ P)\ et\ (non\ Q)$
   (d) $P\ et\ (non\ Q)$
3. Quelle est la négation de : $(non\ P)\ ou\ (non\ Q)$?
   (a) $P\ et\ Q$
   (b) $P\ ou\ Q$
   (c) $(non\ P)\ et\ (non\ Q)$

Exercice 7. Soit x un réel. Ecrire la négation de
$(x^2 \geq 1 \wedge x^3 < 2) \vee (x^2 \leq 9 \wedge x < 0)$.

Exercice 8. Quelle est la négation de $P \Rightarrow (nonQ)$? Quelle est sa contraposée ? Illustrer avec des propositions mathématiques de votre choix.

Exercice 9. Soient x et y deux réels. L'implication $(x \geq 0 \text{ ET } y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0$ est-elle vraie ? Ecrire sa contraposée C et sa réciproque R. Lesquelles (ou laquelle ?) sont vraies ?

Exercice 10. On dispose de trois jetons de trois formes différentes (Carré, Rond, Triangle), chaque jeton peut être soit Rouge, soit Vert, soit Bleu. On sait que les affirmations suivantes sont vraies :

A0. Les jetons sont tous de couleurs différentes.

A1. Si le jeton rond est bleu, alors le jeton carré est vert.

A2. Si le jeton rond est vert, alors le jeton carré est rouge.

A3. Si le jeton carré n'est pas bleu, alors le jeton triangulaire est vert.

Donner toutes les configurations possibles des jetons (s'il y en a)

Exercice 11. On dispose de 4 cartes, chacune possède sur un côté une lettre, sur l'autre côté un entier. Elles sont posées, les faces visibles sont $A, B, 4$ et 7.

Combien de cartes AU PLUS devez-vous retourner, et lesquelles, pour déterminer de façon certaine si l'implication suivante est vraie pour toutes les cartes :

"La lettre est une voyelle $\Rightarrow$ le nombre est pair".

1.2 Quantificateurs

Exercice 12. Écrire les négations logiques des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0 \text{ OU } x < 1)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 \Rightarrow x^2 < 1.$
3. $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ p \geq n.$
4. " Tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de l'intervalle $[0, 1]$."

Exercice 13. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. La définition de $A \subset B$ est "tout élément de A est élément de B". À quelle(s) proposition(s) ci-dessous cela correspond-il ?

- $\forall x \in A, x \in B$
- $\forall x \in E, (x \in B \Rightarrow x \in A)$
- $\forall y \in E, (y \in A \Rightarrow y \in B)$
- $(\forall x \in E, x \in A) \Rightarrow (\forall x \in E, x \in B)$

Quelle est la négation de $A \subset B$?

Exercice 14. Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la définition de "f est bornée" est "$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$". Donner la définition de "f n'est pas bornée".

Quelqu'un propose une définition alternative de "f est bornée" sous la forme : "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$". Que pensez-vous de cette nouvelle définition ?
La définition de "f est croissante" est
"$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$". Donner la définition de "f n'est pas croissante". Est-ce la même chose que "f est décroissante" ?

Exercice 15. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions dépendant d'un paramètre réel x. On suppose qu'on a déterminé que $P(1)$ est vraie et que $Q(\sqrt{2})$ est fausse. Peut-on dire des choses sur les proposition suivantes ?
a) $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ b) $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$
c) $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x)$ d) $\exists x \in \mathbb{R}, Q(x)$

Exercice 16. Pour chacune des propositions suivantes, donner sa négation, et dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant la réponse)

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$
5. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$
6. $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x + y = 0)$.

Exercice 17. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. A quelle(s) écritures correspondent les propositions :

(P) : f est la fonction nulle.
(Q) : f s'annule sur $\mathbb{R}$.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

Ecrire sous la forme d'une proposition avec quantificateurs les énoncés :
(R) : f n'est pas la fonction nulle
(S) : f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. Écrire sous la forme d'une proposition avec quantificateurs les énoncés suivants :

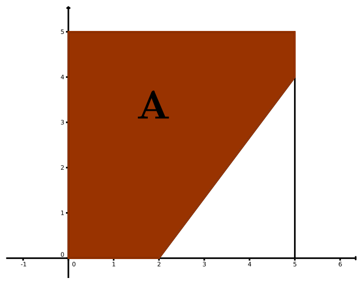
1. Il existe un réel plus petit que tous les entiers naturels.
2. L'intervalle I est inclus dans $[1, 2]$.

Exercice 19. Soient E un ensemble, A et B deux parties de E définies par :
$A = \{x \in E, P(x) \text{ vraie}\}$ et $B = \{x \in E, Q(x) \text{ vraie }\}$
où P et Q sont deux propositions.
Traduire à l'aide des ensembles A et B les propositions :

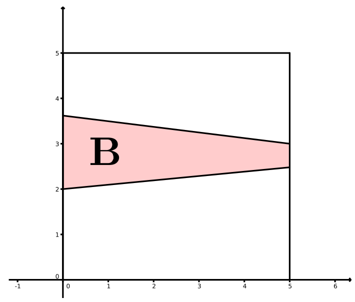
1. $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$
2. $\exists x \in E, P(x)$ et $Q(x)$
3. $\forall x \in E, P(x)$ ou $Q(x)$
4. (plus dur...) $\exists x \in E. P(x) \Rightarrow Q(x)$

Exercice 20. Pour chacun des ensembles colorés ci-dessus indiquez si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. On prendra tour à tour $E = A$ puis B puis C.

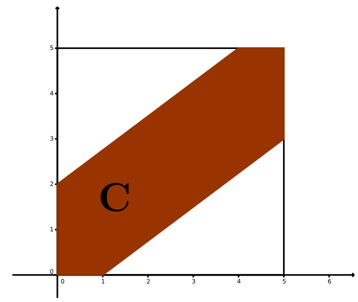
1. $\forall x \in [0, 5],\ \exists y \in [0, 5],\ (x, y) \in E,$
2. $\forall y \in [0, 5],\ \exists x \in [0, 5],\ (x, y) \in E,$



(a)



(b)



(c)

3. $\exists y \in [0,5],\ \forall x \in [0,5],\ (x,y) \in E,$
4. $\exists x \in [0,5],\ \forall y \in [0,5],\ (x,y) \in E.$

Donner la négation de la proposition

$$\forall x \in [2,5],\ \exists y \in [0,5],\ (x,y) \in A.$$

Cette négation est-elle vraie ou fausse ?

1.3 Raisonnement par la contraposée

Exercice 21. Écrire les réciproques et les contraposées des implications suivantes :

1. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
2. $(\forall \varepsilon > 0,\ |f(x)| < \varepsilon) \Rightarrow (f(x) = 0)$

Exercice 22. Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de l'implication suivante :

" Si n^2 est impair, alors n est impair."

A-t-on démontré $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ impair $\Rightarrow n$ impair ?

Exercice 23. *Le but de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :*

“ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair ”

1. Écrire la propriété ci-dessus sous la forme d'une proposition mathématique comportant une implication.
2. Écrire la contraposée de l'implication donnée à la question 1).
3. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$, prouver que la proposition de la question 2) est vraie.
4. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Exercice 24. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel.

1. Quelle est la contraposée $\mathcal{Q}(x)$ de la proposition

   $\mathcal{P}(x)$: “$x < 0 \Rightarrow x < x^2$ ” ?
2. Démontrez $\mathcal{Q}(x)$.

1.4 Raisonnement par l'absurde

Exercice 25. Montrer par l'absurde que le polynôme $x^4 - 3x^3 + x^2 - x + \sqrt{3}$ n'admet pas de racine entière.

Exercice 26. *Principe des tiroirs*
Démontrer que lorsque l'on range $(n+1)$ bonnets dans n tiroirs distincts, alors au moins un des tiroirs contient au moins 2 bonnets.

Exercice 27. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On veut montrer la propriété (P) suivante :

> Au moins deux de ces réels sont distants de moins de $\frac{1}{n}$ (moins étant compris au sens large)

1. Faire un dessin avec $n = 3$.
2. Écrire à l'aide de quantificateurs une proposition mathématique portant sur les quantités $x_i - x_{i-1}$ équivalente à la propriété (P).
3. Écrire la négation de cette formule logique.
4. En déduire une démonstration par l'absurde de la propriété (P).

Exercice 28. Sur une île, on trouve deux sortes de personnes : les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours.

1. Alice et Bob sont deux habitants de cette île. Alice déclare "L'un d'entre nous deux au moins est un menteur". Montrer par l'absurde que Alice est sincère. Qu'en est-il de Bob ?
2. Chloé et Denis sont deux autres habitants. Chloé déclare "Je suis menteuse ou Denis est sincère". Montrer par l'absurde que Chloé est sincère. Qu'en est-il de Denis ?
3. Gaspard, Melchior et Balthazar sont trois habitants. Gaspard déclare : "Nous sommes tous menteurs". Melchior dit : "Un et un seul d'entre nous est sincère". Montrer par l'absurde que Gaspard est un menteur, puis que Melchior est sincère. Qu'en est-il de Balthazar ?

Exercice 29. *Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.* Supposons qu'il existe deux entiers naturels tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ et donc que $p^2 = 2q^2$.

1. Montrer qu'on peut supposer que p et q sont premiers entre eux.
2. Montrer que p est pair.
3. En déduire que q est pair.
4. En déduire que p et q n'existent pas.

1.5 Raisonnement par récurrence

Exercice 30. On note $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$.
Montrer que $\forall n \geq 15, \dfrac{3^n}{n!} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 31. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5 divise $3^{2n+1} + 2^{2n+1}$.

Exercice 32. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 16 divise $5^n - 4n - 1$.

Exercice 33. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante

$$P_n \ : \ 2^n > n^2.$$

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie.
2. Quels sont les entiers n pour lesquels la propriété P_n est vraie ?

Exercice 34. NEW
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 35. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Exercice 36. Soient P_n la propriété "9 divise $10^n - 1$" et Q_n la propriété "9 divise $10^n + 1$".

1. Montrer que si n est un entier, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$ (on pourra utiliser $10^{n+1} = 10^n.(9+1)$)
2. "$\forall n \in \mathbb{N}, P_n$" est-elle vraie ? Et "$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n$" ?

1.6 Applications

Exercice 37. Soit $X = \{1,2,3,4\}$ et $f : X \to X$ une application donnée (en extension) par

$$f(1) = 1, \ f(2) = 1, \ f(3) = 3, \ f(4) = 2.$$

Soient $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}$.

1. Faites un schéma (un dessin) explicitant la définition de l'application f.
2. Donner le domaine de l'application et son image (c.à.d., $f(X)$).
3. Calculer $f(A), f^{-1}(A)$.
4. Calculer $f(B), f^{-1}(B)$.
5. L'application $f^{[2]} = f \circ f$ est-elle bien définie ? Si oui, explicitez-la.

Exercice 38. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$g(x,y) = x^2 + y.$$

1. Déterminer les images de (0,0), (1, 0), (0,1), (-1, 0) et (2,3).
2. Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0,1.

Exercice 39. On considère l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = |x|.$$

1. Déterminer les images directes $f(\{-1,2\}), f([1,3]), f(]-1,3[)$.
2. Déterminer les images réciproques $f^{-1}(4), f^{-1}(-1), f^{-1}(]-2,3])$.

Exercice 40. Une fois de plus, soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ deux applications données par

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

1. L'application $g \circ f$ est-elle bien définie ? Si oui, explicitez-la, donnez son domaine et image.
2. Les mêmes questions pour $f \circ g$.

Exercice 41. Considérons les applications f, g suivantes :

$$f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[, \quad f(x) = \sqrt{x},$$
$$g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln x.$$

Pour chacune des compositions $f \circ g$ et $g \circ f$, dire si elles sont bien définies. Le cas échéant, préciser leur domaine et écrire leur expressions.

1.7 Manipulation de sommes

Exercice 42. Ecrire en utilisant le signe $\sum$ les quantités suivantes :

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}$
2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{100}$
3. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{99}$

Exercice 43. Soient n un entier positif et $(x_1, \ldots, x_n)$ n réels.

1. Si a est un réel quelconque, on considère l'égalité :

   $\sum_{k=1}^{n} (x_k - a)^2 = \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - 2a \sum_{k=1}^{n} x_k + na^2$.
   Ecrire cette égalité sans le signe $\sum$ pour $n = 1$ et $n = 2$ et la vérifier.
   La démontrer si n est un entier quelconque.

2. On note $m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ la moyenne arithmétique des x_k. Vérifier

   $\sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 = \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - nm^2$.

Exercice 44. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sum_{i=1}^{100} i - \sum_{j=0}^{101} (j + 1)$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{j=0}^{n+2} (j + 1)^2$
3. $\sum_{i=n}^{2n} i - \sum_{i=n+1}^{2n+2} i$

Exercice 45. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha + a_i) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i$ e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^{\alpha}$

1.8 Formule du binôme, dénombrement

Exercice 46. Soient E, F, G trois ensembles finis. Exprimer le cardinal de $E \cup F \cup G$ en fonction des cardinaux de $E, F, G, E \cap F, F \cap G, G \cap E$ et $E \cap F \cap G$.

Exercice 47. Soit x un réel et soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)^n$.

1. Développer $f(x)$.

2. En déduire, en faisant un choix judicieux pour la valeur de x, pour tout entier n, les deux égalités :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

3. Soit E un ensemble de n éléments. Que peut-on déduire des égalités précédentes sur le nombre de parties de E ?

Exercice 48. *
Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

1. Soit $n \geq p \geq 1$. Montrer que
$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$
En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

2. Retrouver ce résultat en dérivant $f(x) = (1+x)^n$.

1.9 Représentations graphiques

Exercice 49. Représenter sur un plan muni d'un repère orthonormé les ensembles de points dont les coordonnées (x, y) vérifient les inégalités ou systèmes d'inégalités suivantes :

1. $x - y < 1$ et $x \geq 1$

2. $2x + y > 0$ ou $y < 0$

3. $xy < 0$

Exercice 50. Décrire à l'aide d'inégalités les ensembles de points suivants

1. Le quart de plan inférieur droit.

2. L'intérieur du carré de sommets $((0,0); (0,1); (1,0); (1,1))$

3. L'intérieur du triangle de sommets $((0,0); (1,0); (1,1))$

1.10 Inéquations

Exercice 51. Déterminer l'ensemble des solutions réelles des inéquations ou inéquations suivantes :

1. $\frac{1}{x} \leq x$
2. $(x^2-1)^2 > 1$.
3. $\frac{2x^2-x-6}{x^2-4} \geq 0$.

1.11 Raisonnements sur les inégalités

Exercice 52.
1. On suppose que $-5 < x < 1$. Quel encadrement peut-on déduire pour x^2 ?
2. On suppose que x et y sont deux réels vérifiant $x \leq 2$ et $y < -1$. Peut-on en déduire une inégalité pour $x+y$? xy ? x^2 ? y^2 ?
3. (Plus difficile) On suppose que x et y sont deux réels vérifiant $-2 \leq x \leq 3$ et $-7 \leq y \leq -5$. Peut-on comparer x et y ? x^2 et y^2 ? Quelle(s) inégalité(s) peut-on obtenir pour $\frac{y^2}{y^2-x^2}$?

Exercice 53. Moyenne arithmétique, géométrique, harmonique

1. Soient x et y deux réels. Montrer $2xy \leq x^2+y^2$. Peut-on avoir égalité ?
2. Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$. On pose
$m = \frac{a+b}{2}$ (moyenne arithmétique) et $g = \sqrt{ab}$ (moyenne géométrique). Montrer $a \leq g$, $m \leq b$ et $g \leq m$ (on pourra utiliser la première question), et ordonner a, b, m et g.
3. (plus dur). Si $0 < a \leq b$, on définit la moyenne harmonique h de a et b par $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$.
Montrer $a \leq h \leq g \leq m \leq b$.

Exercice 54. Partie entière
Calculer $E(1.5)$, $E(1)$ et $E(-0.5)$.
Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, E(x+1) = E(x)+1$.
2. Montrer $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, E(x)+E(y) \leq E(x+y)$
3. A-t-on pour tout réel x $E(2x) = 2E(x)$?

1.12 Valeur absolue

Exercice 55. Compléter le tableau suivant

valeur absolue	distance	intervalle	encadrement
$\lvert x-3\rvert \leq 1$			
	$d(x;-4) \leq 2$		
			$-2 \leq x \leq 2$
		$x \in]6,10[$	

Exercice 56. Représenter graphiquement les ensembles de solutions des inéquations suivantes et les écrire à l'aide d'intervalles. Réécrire ces inégalités sous forme d'inégalités ne faisant pas apparaître une valeur absolue.

1. $|x| \leq \frac{1}{10}$
2. $|x-1| \leq 1$
3. $|x+2| \leq 3$
4. $|x+1| \geq \frac{1}{2}$
5. $|x-3| \geq 2$ et $|x-2| \geq 1$.
6. $|x-\pi| \leq \epsilon$ où ϵ est un réel strictement positif fixé.
7. $|x-a| \leq \frac{1}{2}$ où a est un réel fixé.
8. $|2x-3| \leq 2$

Exercice 57. Trouver une inégalité équivalente à chacun de ces encadrements, comportant une valeur absolue.

1. $-2 \leq x \leq 2$
2. $1 < x < 2$
3. $-\epsilon < x < \epsilon$

Exercice 58. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $|x-1| = 5$

b) $|x+3| < 2$

c) $|x+7| \geq 7$

d) $|x+5| \leq -9$

e) $|x-2\sqrt{3}| > -2\sqrt{3}$

Exercice 59. Déterminer a et r tels que les nombres x satisfaisant l'inégalité $|x+2| > 1$ se trouvent à une distance de a supérieure à r.

Exercice 60. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $|x-1| = |3-x| + 2$

b) $|2x-5| = 2|x-4| + 3$

Indication : $|2x-5| = 2|x-4| + 3 \Leftrightarrow |x - \frac{5}{2}| = |x-4| + \frac{3}{2}$.

c) $|x+6| \leq |x-10|$

d) $|5-2x| > 2|x+3|$

Indication : $|5-2x| > 2|x+3| \Leftrightarrow |x - \frac{5}{2}| > |x+3|$.

e) $|x+6|+|x-10|<16$
Indication : $d(-6;10)=16$.

f) $|x+6|+|x-10|\geq 15$

g) $|x-2|\leq|2x-1|$.

Exercice 61. (DS 2019) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x-1|-|x+2|\geq 2$.

Exercice 62. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+1|+|x-1|\leq|2x+4|$.

Exercice 63. **Inégalité du parallélogramme** Soient a et b deux réels.

1. A l'aide de l'inégalité triangulaire, comparer $|a|$ et $|b|+|b-a|$.
2. En déduire $|a|-|b|\leq|b-a|$
3. De manière analogue, comparer $|b|-|a|$ et $|b-a|$
4. En déduire $||a|-|b||\leq|a-b|$, puis $||a|-|b||\leq|a+b|$.

Exercice 64. Soit x un réel tel que $|x|\leq 2$. On souhaite majorer $\left|\frac{x+\sin x}{x-3}\right|$, c'est-à-dire trouver un réel A tel que $\left|\frac{x+\sin x}{x-3}\right|\leq A$. Doit-on chercher à majorer ou minorer le numérateur ? Le dénominateur ? Proposer un réel A qui convienne.

2 Nombres Complexes

2.1 Ecriture algébrique et trigonométrique

Exercice 65. Résoudre les équations suivantes :

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\quad (\textit{indication : dvelopper}\cos(x-\pi/4))$$
$$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$$

Exercice 66. Développer les expressions suivantes et les mettre sous forme algébrique $a+bi$ avec a et b dans $\mathbb{R}$:

$$2(1+\sqrt{2}i),\quad i(2-i),\quad (1-i)(1+i),\quad 1+\sqrt{3}i+(2+i)(1-3i),\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$$

Exercice 67. Calculer les parties réelle et imaginaire de

$$z = \frac{2+i}{1+2i} \text{ et } z' = \frac{2i(1-i)}{2-i}.$$

Exercice 68. Ecrire sous la forme $x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, les nombres complexes suivants :

$$\textbf{a.}\ \forall n\in\mathbb{N}\quad i^n \qquad \textbf{b.}\ (2+3i)^3 \quad \textbf{c.}\ \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 69. Soit

$$z = \frac{(1+i)^5-1}{(1-i)^5-1}.$$

Montrer que $z\bar{z} = 1$.

Exercice 70. Calculer le module et argument des nombres complexes suivants :

1. $1+i\sqrt{3}$
2. $-\sqrt{6}+i\sqrt{2}$
3. $(1-i)(\sqrt{3}-i)(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$
4. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$

Exercice 71. Déterminer les entiers naturels n tels que $(1-i\sqrt{3})^n$ soit

1. imaginaire pur,
2. réel négatif.

Exercice 72. Donner l'écriture cartésienne et l'écriture trigonométrique de $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}$.

En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 73.

1. Mettre sous forme exponentielle $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.
2. Déterminer la forme exponentielle de $(1+i)^5$ et simplifier $\dfrac{(1+i)^5-1}{(1-i)^5-1}$.
3. Mettre sous forme exponentielle $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$.
4. Simplifier $\dfrac{e^{it}+1}{e^{-it}-1}$ pour t réel différent de 0 $[2\pi]$.
5. Mettre sous forme trigonométrique $1+\cos\theta+i\sin\theta$.

Exercice 74. Soient $n \geq 1$ un entier et $x \in \mathbb{R}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k$.
En identifiant les parties réelle et imaginaire, calculer les quantités $C_n(x)$ et $S_n(x)$ définies par

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx) \text{ et } S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sin(kx).$$

Montrer que

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{6\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=0.$$

Exercice 75.

1. Exprimer $\cos\theta$ à l'aide de $e^{i\theta}$ et de $e^{-i\theta}$.
2. Calculer $\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^5$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. En regroupant les termes de la forme $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$, trouver une expression de $\cos^5\theta$ en fonction des cosinus et des sinus de multiples de θ.

Exercice 76.

1. Exprimer $e^{5i\theta}$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.
2. En déduire une expression de $\cos 5\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

Exercice 77. Soit x un nombre réel appartenant à $]-\pi,\pi[$. Déterminer le module et l'argument de $1+e^{ix}$ (mettre $e^{i\frac{x}{2}}$ en facteur).

2.2 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 78. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

$$\textbf{A. } z^3 = 8i \qquad \textbf{B. } 4z^4 = -i \qquad \textbf{C. } (z+1)^4 = -16.$$

Exercice 79.

1. Déterminer les racines cubiques de l'unité (i.e. les complexes z tels que $z^3 = 1$). On donnera leur forme algébrique et leur forme trigonométrique.
2. Soient j et j' les deux racines non réelles de cette équation. Montrer que

$$j' = j^2 = \bar{j}, \qquad 1 + j + j^2 = 0$$

Exercice 80. Cas particulier des racines carrées. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 = -4$
2. $z^2 = -3$
3. $z^2 = 2i$
4. $z^2 = 1 + i$
5. $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$
6. $z^2 = 3 - 4i$.(On pourra chercher z sous la forme $a + ib$).

Exercice 81. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 - 5iz - 7 + i = 0$
2. $z^2 + 2iz\sqrt{2} - 2(1+i) = 0$.

Exercice 82. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Exercice 83. 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
2. Mettre les solutions de cette équation sous forme trigonométrique.
3. Résoudre $Z^4 + Z^2 + 1 = 0$, (donner les solutions sous forme trigonométrique).

Exercice 84. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$$

sachant qu'elle admet une solution réelle.

$$z^4 + (-4+3i)z^2 + 7 - i = 0.$$

Exercice 85.

1. Combien l'équation $z^5 = 1$ admet-elle de solutions dans $\mathbb{C}$? Donner sous la forme trigonométrique (ou polaire) toutes les solutions de l'équation $z^5 = 1$ dans le corps des nombres complexes.
2. Soit z une solution de l'équation $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$; montrer que $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.
3. Soit z une solution de l'équation $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$; montrer que si $z \neq 1$, on a

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

puis en déduire

$$z^2 + \bar{z}^2 + z + \bar{z} + 1 = 0$$

4. Si $z = e^{i\theta}$, vérifier que : $z^2 + \bar{z}^2 + z + \bar{z} + 1 = 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1$. En déduire que le nombre $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$ s'écrit $x + y\sqrt{5}$ où x et y sont deux nombres rationnels que l'on calculera.

.

3

Fonctions

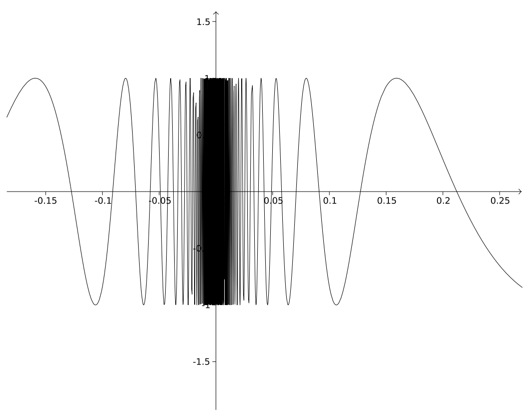
3.1 Généralités sur les fonctions

Exercice 86. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

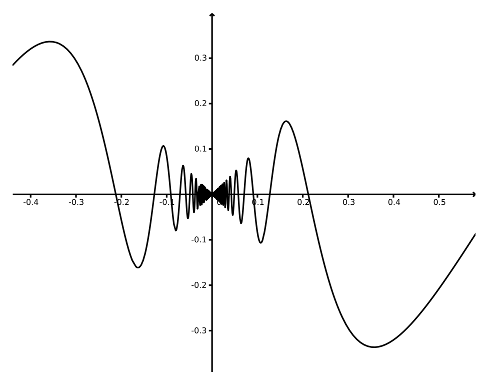
$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}\,; \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2\,x - 5}\,; \quad h(x) = \ln\left(4\,x + 3\right).$$

3.2 Définition de limite

Exercice 87. On considère les représentations graphiques suivantes



(a)



(b)

1. Avec le graphique que conjecturez-vous en terme de limite lorsque x tend vers 0 pour ces deux fonctions représentées graphiquement ?

2. Dire s'il s'agit de $x \mapsto \cos(1/x)$, $x \mapsto \sin(1/x)$, $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x}$, $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$, $x \mapsto x\cos(1/x)$, $x \mapsto x\sin(1/x)$.

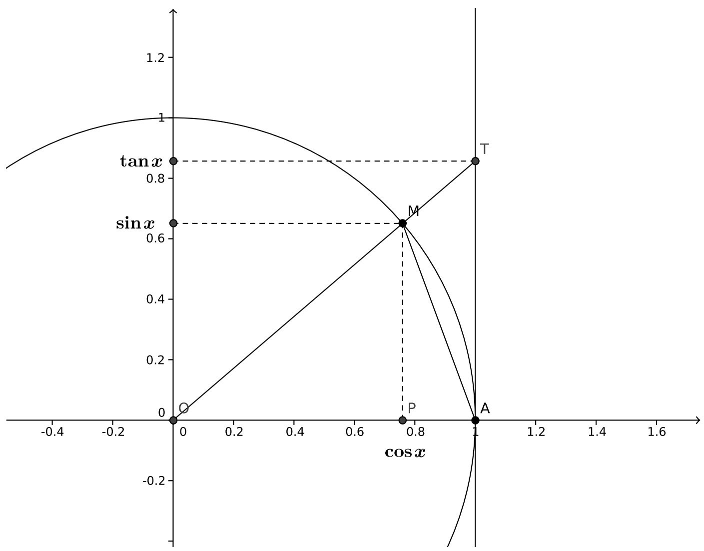
3. Comment peut-on montrer qu'une fonction ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0 ? Démontrer que la fonction représentée au graphique (a) ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0.

4. Démontrer la conjecture faite pour la fonction représentée au graphique (b).

3.3 Calcul de limite

Exercice 88. Une limite connue.

Soit x un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1,0)$, $M(\cos x, \sin x)$, $P(\cos x, 0)$ et $T(1, \tan x)$. Soit A_1 l'aire du triangle OAM, A_2 l'aire du secteur de disque OAM et A_3 l'aire du triangle OAT.



1. On admet que l'aire A_2 du secteur de disque OAM est proportionnelle à x, donner son expression en fonction de x.

2. En comparant les aires prouver que $\sin x \leq x \leq \tan x$.

3. En déduire que $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$.

4. Déterminer la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (distinguer les deux cas $x < 0$ et $x > 0$).

Exercice 89. Déterminer les limites quand elles existent des fonctions suivantes dans les conditions indiquées :

1. $\dfrac{3x^3 + 7x^2 + 2x}{x^3 - 4x}$ en $+\infty$, $-\infty$, 0, 2, -2.
2. $\dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{2x - \sqrt{4x^2+1}}$ en $+\infty$
3. $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0
4. $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ en 2
5. $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$ en 0
6. $\dfrac{x-1}{x^n - 1}$ en 1

3.4 Définition de la continuité

Exercice 90. On considère la fonction suivante :

$$f\,:\,x\mapsto\begin{cases}-x^2 & \text{si} \quad x<0\\ c & \text{si} \quad x=0\\ ax+b & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

Existe-t-il des réels a,b,c pour lesquels f est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 91. On considère la fonction suivante :

$$f\,:\,x\mapsto\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad |\,x\,|<1\\ ax^2+bx+c & \text{si} \quad |\,x\,|\geq 1\end{cases}$$

Existe-t-il des réels a,b,c pour lesquels f est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 92. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
2. Déduire des propriétés de f celles de f^{-1}.
3. Déterminer explicitement f^{-1}.

3.5 Définition de la dérivée en un point

Exercice 93. La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x\mapsto|x-1|$$

est-elle continue aux points 0, 1 et 2 ? Est-elle dérivable en ces points ?

Exercice 94. Déterminer $a,b\in\mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1,\\ ax^2+bx+1 & \text{si} \quad x>1.\end{cases}$$

soit continue $\mathbb{R}_+$, soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 95. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0,\\ x^2\sin(1/x) & \text{si } x\neq 0.\end{cases}$$

1. Montrer que
$$|f(x)|\leq x^2$$
pour tout x. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, avec $f'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$ pour $x\neq 0$.

3. Montrer que f est dérivable en 0.

4. Expliquer pourquoi $\cos(1/x)$ n'admet pas de limite pour $x\to 0$, et en déduire que $f'(x)$ n'admet pas de limite quand $x\to 0$.

3.6 Calculs de dérivées

Exercice 96. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir indiqué sur quels intervalles elles sont dérivables :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 12}, \qquad g(x) = \cos^3(x)\sin^2(x),$$

$$h(x) = \frac{3 - 5x^4}{x^3 - x^2 + x - 1} \qquad k(x) = (\tan x)^5$$

Exercice 97. 1. Montrer que si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est paire, sa dérivée est impaire.

2. Montrer que si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est impaire, alors $f(0) = 0$ et la dérivée est paire.

3.7 Calcul de limites

Exercice 98. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1}$$

3.8 Etude de fonction

Exercice 99. On considère la fonction f définie sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x \tan x}$$

1. Montrer que la fonction f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Soit g sa fonction réciproque. La fonction g est-elle continue sur J ? Est-elle dérivable sur J ?

3.9 Fonctions logarithme, exponentielle et puissances

Exercice 100. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{2x})^x, \quad \lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} x(3^{\frac{1}{x}} - 1),$$

$$\lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{r}{x})^x,$$

avec r réel quelconque.

Exercice 101. 1. Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = x^x$.

2. Déterminer suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $x^x = m$.

Exercice 102. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir indiqué sur quels intervalles elles sont dérivables :

$$f(x) = e^{\cos(\sin(x))}, \quad f(x) = \ln(\sin(x)), \quad f(x) = \ln(\ln(x)), \quad u(x) = (x^3+1)^{\frac{3}{2}} \quad ,$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x + 1}, \quad f(x) = \exp(x^3 - 2x + 1), \quad f(x) = (a\cos\omega x \;+\; b\sin\omega x)e^{cx}$$

Exercice 103. Déterminer les limites en $+\infty$, quand elles existent, des fonctions suivantes :

$$\sqrt{x} - x, \quad e^{\sqrt{x}-x}, \quad \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}, \quad \frac{x - 2\ln(x)}{e^x - 1}.$$

Exercice 104. Calculer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{e^{2x} - e}{2x - 1}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3} - x + 2}{x}$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3} - x + 2}{x}$.

Exercice 105. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}, \quad ; \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}, \quad ; \lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x)), \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{5}} - 1}{x^4 - 1}, \quad \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{1+2\ln x}}.$$

Exercice 106. 1. Quel est le domaine de définition de la fonction

$$f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$$

La fonction f admet-elle une limite à droite en 0 ? Donner le tableau de variations de f.

2. Résoudre l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e, +\infty[$. Montrer que g admet une fonction réciproque. Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$ et $\left(g^{-1}\right)'(\sqrt{2})$.

3.10 Fonctions circulaires et leurs réciproques

Exercice 107. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3 + 3x + \dfrac{1}{2}$.

1. Faire l'étude de la fonction (avec tableau de variation) et tracer la courbe représentative de f.

2. Trouver les solutions dans $[0, 2\pi]$ de l'équation $\sin(3x) = -\dfrac{1}{2}$.

3. Montrer que pour tout réel x, $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.

4. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 108. Montrez que si l'on pose $t = \tan(x/2)$, $x/2 \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{pour } x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 109. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{Arctan} \frac{1}{x-1} \quad , \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Arccos} x - \frac{\pi}{3}}{4x^2 - 1}.$$

Exercice 110. 1. Calculer :

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \operatorname{Arccos}\frac{-1}{2} \quad ; \quad \operatorname{Arctan}\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) \quad ; \quad \operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right) \quad ; \quad \sin\left(\operatorname{Arcsin}1\right)$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin 1\right) \quad ; \quad \tan\left(\operatorname{Arctan}3\right) \quad ; \quad \operatorname{Arctan}\left(\tan 3\right).$$

Exercice 111. Donner une autre expression mathématique de

$$\sin\left(\operatorname{Arccos}x\right) \quad , \quad \cos\left(\operatorname{Arcsin}x\right) \quad , \quad \tan\left(\operatorname{Arcsin}x\right)$$

Exercice 112. Etudier la fonction définie par : $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin x\right)$

Exercice 113. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\quad \operatorname{Arcsin}x + \operatorname{Arccos}x = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 114. 1. Déterminer les domaines de définition, de dérivabilité, et les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) \quad , \quad h(x) = \operatorname{Arctan}\left(x^2 - 1\right).$$

2. Simplifier, suivant les valeurs de x l'expression :

$$g(x) = \operatorname{Arctan}x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}.$$

Exercice 115. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctan}x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble D des réels x tels que f soit dérivable en x.

Pour x appartenant à D, calculer $f'(x)$.

Exercice 116. Etudier la fonction

$$x \mapsto \operatorname{Arcsin}\frac{2x}{1+x^2}$$

La comparer à la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan}x$.

Exercice 117. Soit

$$f(x) = \cos(\operatorname{Arctan}(2x+1)).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier ses limites en $\pm\infty$. Calculer $f(-1)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 1/\sqrt{2}$.
3. Montrer que la restriction de f à $[-1/2, +\infty[$ possède une fonction réciproque g.
4. Calculer $g'(\sqrt{2}/2)$.

Exercice 118. Soit la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Calculer les limites de f aux extémités des intervalles de D.
3. Peut-on prolonger f par continuité sur $[1, +\infty[$, sur $]-\infty, 1]$, et sur $\mathbb{R}$?
4. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée f'.
5. Déduire des questions précédentes une expression simple de $f(x)$ sur $]1, +\infty[$ en fonction de $\operatorname{Arctan}x$.
6. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]1, +\infty[$ et dessiner le graphe de f.

4 Calcul intégral, équations différentielles

Exercice 119. Donner le primitives de

$$\int x^3 dx, \qquad \int \frac{dx}{x^2} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x}} \quad \int \sin x$$

Exercice 120.

1. Représenter graphiquement sur $[-1,2]$ la fonction $x \to |x|$ puis calculer de deux façons différentes $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$.
2. Représenter graphiquement sur $[-2,2]$ la fonction $x \to x^2 - 1$ et $x \to |x^2-1|$. Calculer $\int_{-2}^{2} |x^2-1|\, dx$.
3. Trouver une primitive de
   (a) $x \to \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en précisant les intervalles possibles de définition ;
   (b) $x \to \sqrt{x}$ et $x \to 5^x$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 121. Donner les primitives de

1. $f(x)$ de la forme $u'(x)u^{\alpha}(x)$ avec α réel :
   (a) $\int \dfrac{\ln x}{x}\, dx$ sur $]0, +\infty[$,
   (b) $\int x^4(1+x^5)^5\, dx$,
   (c) $\int \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}\, dx$,
   (d) $\int \tan(x)\, dx$ sur $]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}[$.
   (e) $\int \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\, dx$,
   (f) $\int \sin^3 t \cos t\, dt$,
   (g) $\int \dfrac{\sin x}{(\cos x)^{\frac{4}{5}}} dx$ sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$,
   (h) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$.

2. $f(x)$ de la forme $u'e^u$:
   (a) $\int e^{1-3x}\,dx$,
   (b) $\int xe^{x^2}\,dx$,
   (c) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 122. Donner les primitives de $f(x)$ de la forme précédente après une transformation :

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx, \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx, \qquad \int \cos^2 x\,dx$$

4.1 Intégration par parties

Exercice 123. Calculer, en intégrant par parties,

$$\int_0^2 (3x+2)e^{-x}\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{3}} t\cos t\,dt, \qquad \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt.$$

.

$$\int_0^1 x^2e^x\,dx, \quad \int_0^x e^t\cos t\,dt, \quad \int_0^\pi t^2\cos t\,dt, \quad \int_1^2 x^2\ln x\,dx,$$

$$\int_0^\pi \cos^3 x\,dx, \quad \int_1^2 \ln t\,dt, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$

Exercice 124. Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$$

1. Calculer I_1 (*faire une intégration par parties*).
2. Montrer que pour tout $n > 0$, on a

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n.$$

Exercice 125. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx$$

1. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n. On pourra faire une intégration par parties en remarquant que $x^{n+2}e^{x^2} = x^{n+1} \times xe^{x^2}$.
2. Calculer I_1, puis I_5.

Exercice 126. 1. A l'aide de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos x$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x \sin^5 x\,dx$.

Exercice 127. Le but de cet exercice est de calculer $\int_0^\pi \cos^4 x\,dx$.

1. En utilisant que $\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$ et la formule du binôme, montrer que
$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)$$
2. Calculer $\int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$.

Exercice 128. * On considère pour tout entier naturel n les intégrales I_n et J_n suivantes :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \, dx.$$

1. Montrer que les intégrales I_n et J_n sont égales.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
4. Montrer que pour tout entier p
$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p\, p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \qquad I_{2p+1} = \frac{(2^p\, p!)^2}{(2p+1)!}$$

4.2 Intégration des fractions rationnelles

Exercice 129. Calculer
$$\int_2^4 \frac{1}{(x-1)^2} dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{2x}{x^2+4} dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx.$$

Exercice 130. Calculer
$$\int \frac{1}{x^2+4} \quad ; \quad \int \frac{x+1}{x^2+4} dx'.$$

Exercice 131. Déterminer sur l'intervalle $]1, +\infty[$ les primitives de la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Exercice 132.
1. Trouver les réels a et b tels que pour tout u différent de -1 et de -2
$$\frac{1}{u^2+3u+2} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u+2}.$$
2. Calculer pour $x \geq 0$
$$F(x) = \int_0^x \frac{du}{u^2+3u+2}.$$
3. Trouver $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.
4. Calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(\sin t)^2 + 3(\sin t) + 2} dt,$$
on pourra effectuer le changement de variable $u = \sin t$.

Exercice 133. Déterminer sur l'intervalle $]1, +\infty[$ les primitives de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Indication : trouver a, b et c tel que

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}$$

4.3 Équations différentielles

Exercice 134. Résoudre les équations différentielles

1. $y' = xy$.
2. $y' + xy = x$.
3. $xy' - y = x^3$.
4. $y' + (\tan x)y = \sin x \cos x$.

Exercice 135. Résoudre les problèmes suivants :

1. $y' + y = 0$ avec $y(0) = 1$.
2. $2y' - y = 0$ avec $y(0) = 1$.
3. $y' = xy$ avec $y(0) = 1$.
4. $y' + 5y = 3$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.
5. $y' + 3y = 4e^x$ avec la condition initiale $y(0) = -2$.

Exercice 136. Résoudre les équations différentielles

1. $y' + y = xe^{-x} + 1$.
2. $3y' + 2y = 2x^3 + 9x^2 + 14$.
3. $y' - y = \sin x + 2\cos x$.
4. $y' = 3y + x^2e^x + \sin x$.

Exercice 137. Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle suivante :

$$(1 + x^2)y' - y = 0.$$

Quelle est la solution vérifiant $y(1) = 2$?

Exercice 138.

1. Vérifier que $x \mapsto f(x) = x^2 - 2x + 2$ est solution de
$$y' + y = x^2$$
2. Déterminer l'ensemble des solutions de
$$y' + y = e^{-x}(\cos x + x^2)$$
3. En déduire les solutions de
$$y' + y = e^{-x}(\cos x + x^2) + x^2$$

Exercice 139. 1. Déterminer les solutions sur $]-\infty, 1[$ de l'équation différentielle

$$(x-1)y' + (x-2)y = x(x-1)^2$$

Quelles sont celles vérifiant la condition $y(0) = 0$?

2. Déterminer les solutions sur $]1, +\infty[$ de l'équation différentielle précédente.

Exercice 140. Soit l'équation différentielle

$$(E): \quad |x|y'(x) + y(x) = x^3$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{x^3}{2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x^3}{4} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 141. Soit l'équation différentielle $(E) : y'(x) + 3x^2 y(x) = x^2$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
2. Quelle est la solution vérifiant $y(0) = 1$?