

Université de Bordeaux
Licence de Sciences, Technologies, Santé
Mentions Mathématiques et Informatique
M1MI2012 Algèbre 1

Algèbre 1

Exercices et Annales

Systemes lineaires

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{R} les systemes lineaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} 2x - 3y + 6z + 2t = 5 \\ y - 2z + t = 1 \\ z - 3t = 2 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 11y - z = 5 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2t = 1 \\ 5x + 4y + z + 3t = 14 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ x - y + z + t = 6 \\ x + y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 4 \end{cases}$$

$$(S_6) \begin{cases} 2x + 3y - 5z + 4t = 43 \\ -3x + 2y + z - 2t = 5 \\ 4x - y + 2z + 3t = -13 \\ 5x + y + 3z + t = -28 \end{cases}$$

$$(S_7) \quad x - y + 2z = 0$$

$$(S_8) \begin{cases} x + 7y + 4z + t = 0 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 5x + 5y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre dans \mathbb{C} les systemes lineaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x + iy + 2z = 0 \\ ix + 3z = 0 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} -2x + y = -4 + i \\ x + iz = 2 - i \\ x - y - iz = 2 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x + y - z = 1 + 2i \\ ix - 3z = 3 - i \\ x + iy + z = 2 - i \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + iy - z = i \\ -ix + (1 + i)y + 2iz = 1 \end{cases}$$

$$(S_6) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + jy + j^2z = 1 \\ x + j^2y + jz = 1 \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre dans \mathbb{R} les systemes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 0 \\ x - 2y + 2z - t = 1 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = -1 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y + 3z = 7 \\ 3x + 8y - 7z = 3 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_4 + 2x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 0 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x_1 + 2x_3 + 4x_4 = -8 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -12 \end{cases}$$

Exercice 4. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres u, v, w, t pour que les systèmes suivants admettent des solutions, puis les résoudre :

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y + 6z = u \\ 3x + y + 3z = v \\ 6x + 6y + z = w \\ 7x + 9y + 7z = t \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 3x - y - 2z = u \\ -x + 3y - z = v \\ -2x - 2y + 3z = w \\ x - 3y + z = t \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 2x + y + 2z = u \\ x + 2y + z = v \\ x + y + z = w \\ 4x + 3y + 4z = t \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + jy + j^2z = u \\ j^2y + jz = v \end{cases}$$

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 5. Dans les cas suivants, décidez, en le justifiant, si \vec{v} est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots$:

1. $\vec{v} = (3, 1, -4)$, $\vec{e}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, -1)$.
2. $\vec{v} = (1, 1, 1, -1)$, $\vec{e}_1 = (1, 0, 2, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 3, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 4, 1)$.
3. $\vec{v} = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{e}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, -1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, -1)$, $\vec{e}_4 = (1, 0, 0, -1)$
4. $\vec{v} = (0, 0, 0)$, $\vec{e}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{e}_2 = (3, 2, 1)$, $\vec{e}_3 = (12, 24, 36)$.

Exercice 6. Démontrez que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3

Exercice 7. Démontrez que $E = \{(a, b, 0, a) \mid a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^4 .

Exercice 8. Dans les cas suivants, décidez, en le justifiant, si \vec{v} appartient au sous-espace vectoriel E de \mathbb{R}^n :

1. $\vec{v} = (20, -51, 112)$, $E = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$
2. $\vec{v} = (0, 0, 0, 0)$, $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$
3. $\vec{v} = (0, 1, 2, 3, 4)$, $E = \text{Vect}((0, 1, 1, -1, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 0, -1))$
4. $\vec{v} = (1, j, j^2)$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

Exercice 9. Soient dans \mathbb{R}^4 les vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $\vec{e}_2 = (1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$?

Exercice 10. Dans \mathbb{R}^4 , décidez si les sous-espaces F et G suivants vérifient : $F \subset G$, ou $G \subset F$, ou ni l'un ni l'autre :

$$F = \text{Vect}((1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5))$$

$$G = \text{Vect}((-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4))$$

Exercice 11. Soient E et F les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 engendrés respectivement par les vecteurs $((2, 3, -1), (1, -1, -2))$ et $((3, 7, 0), (5, 0, -7))$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 12. Dans \mathbb{C}^n , montrez que les deux sous-espaces vectoriels suivants sont égaux :

$$E = \{\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \mid \sum_{i=1}^n v_i = 0\}$$

$$F = \text{Vect}((1, -1, 0, \dots, 0), (1, 0, -1, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0, -1))$$

Exercice 13.

1. Soit E et F deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel. Démontrez les inclusions : $E \cap F \subset E \subset E + F$ et $E \cap F \subset F \subset E + F$.
2. Dans \mathbb{R}^4 , on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$E = \{\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \mid v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \text{ et } v_2 + 2v_3 + 3v_4 = 0\}$$

$$F = \text{Vect}((1, 2, 0, 0), (1, -1, -1, 1))$$

- (a) Trouvez un élément qui appartient à E mais pas à $E \cap F$.
- (b) Trouvez un élément qui appartient à F mais pas à $E \cap F$.
- (c) Trouvez un élément de $E + F$ qui n'est pas dans E ni dans F .

Exercice 14. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1. $E_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$
2. $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ continue}\}$
3. $E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ croissante}\}$
4. $E_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$

Exercice 15. Montrez que les sous-ensembles suivants de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels :

1. L'ensemble des suites à support fini.
2. L'ensemble des suites de limite nulle.

Exercice 16. Montrez que les parties de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$:

1. $F = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f'(a) = f'(b)\}$
2. $G = \{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)dt = 0\}$

Exercice 17. Soit I un ensemble et E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On note $\mathcal{F}(I, E)$ l'ensemble de toutes les applications de I à valeurs dans E . Montrez que cet ensemble est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour des opérations d'addition et de multiplication scalaire que vous préciserez.

Exercice 18. Notons $E =]0, +\infty[$. Pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit une loi interne $x \dot{+} y = xy$ et une loi externe $\lambda \cdot x = x^\lambda$. L'ensemble $(E, \dot{+}, \cdot)$ est-il un \mathbb{R} -espace vectoriel ?

Exercice 19. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel. Pour $z \in \mathbb{C}$, $x \in E$, on définit une nouvelle loi externe par $z \cdot x = \bar{z}x$. L'ensemble E muni de la loi interne initiale et de cette nouvelle loi externe est-il encore un \mathbb{C} -espace vectoriel ?

Familles libres, génératrices, bases

Exercice 20. Les familles suivantes de vecteurs de \mathbb{R}^3 sont-elles libres ? Si ce n'est pas le cas, trouver une relation linéaire liant ces vecteurs :

1. (\vec{e}_1, \vec{e}_2) avec $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)$ et $\vec{e}_2 = (1, 2, 2)$
2. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (1, 1, 1)$
3. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{e}_2 = (2, 1, -1)$ et $\vec{e}_3 = (1, -1, -2)$
4. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{e}_2 = (2, -1, 3)$ et $\vec{e}_3 = (-1, 1, -1)$.

Exercice 21. On considère dans \mathbb{R}^3 , les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (4, 1, 4)$, $\vec{w} = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que les familles (\vec{u}, \vec{v}) , (\vec{u}, \vec{w}) et (\vec{v}, \vec{w}) sont libres.
2. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle libre ?

Exercice 22. Les familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 suivantes sont-elles libres ou liées ? Donnez une base du sous-espace vectoriel engendré par chacune de ces familles.

1. $A = ((2, 3, 0), (0, 1, 4))$
2. $B = ((0, 1, -1), (1, 2, -1), (0, 2, 1), (4, 6, 3))$
3. $C = ((1, 1, 0), (2, -1, 1), (0, -1, 1))$

Exercice 23. Dans \mathbb{R}^3 , on considère deux vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\vec{v} = (0, 1, 2)$. La famille (\vec{u}, \vec{v}) est-elle libre ? Forme-t-elle une base de \mathbb{R}^3 ? Déterminer une équation linéaire homogène dont \vec{u} et \vec{v} sont solution, puis montrer que l'ensemble de ses solutions est égal à $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

Existe-t-il \vec{w} tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base de \mathbb{R}^3 ? Si oui, en trouver un.

Exercice 24. Les familles de vecteurs suivantes peuvent-elles être complétées en une base de \mathbb{R}^4 ? Si oui, le faire.

1. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, avec $\vec{u} = (1, 2, -1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, -4, 1)$, $\vec{w} = (2, 5, -6, 1)$.
2. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, avec $\vec{u} = (1, 0, 2, 3)$, $\vec{v} = (0, 1, 2, 3)$, $\vec{w} = (1, 2, 0, 3)$.
3. (\vec{u}, \vec{v}) , avec $\vec{u} = (1, -1, 1, -1)$ et $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$.

Exercice 25. $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de \mathbb{K}^3 . Soit $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ et $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Montrer que la famille (\vec{f}_1, \vec{f}_2) est libre et compléter celle-ci en une base de \mathbb{K}^3 .

Exercice 26. On considère les vecteurs $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (1, 1, 0)$ de \mathbb{R}^3 . Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 . Calculer les coordonnées du vecteur $(1, 1, 1)$ dans cette base.

Exercice 27. Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs $\vec{u}_1 = (0, \lambda, 2)$, $\vec{u}_2 = (\lambda, 3, 5)$ et $\vec{u}_3 = (\lambda, 0, 1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer pour quelles valeurs de λ la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre.
2. Déterminer pour quelles valeurs de λ la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est génératrice de \mathbb{R}^3 .
3. En déduire que $((0, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (x, y, z)$ dans cette base.

Exercice 28. Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1})$ une famille de vecteurs de \mathbb{K}^n , avec $n \geq p + 1$. Établir :

1. Si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est libre et $\vec{u}_{p+1} \notin \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$, alors $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1})$ est libre.
2. Si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1})$ est génératrice de \mathbb{K}^n , et $\vec{u}_{p+1} \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$, alors $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est génératrice de \mathbb{K}^n .

Exercice 29. On munit \mathbb{K}^n d'une base $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $\vec{f}_i = \vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_i$. Montrer que $B' = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ est une base de \mathbb{K}^n .

Exprimer les composantes dans B' d'un vecteur de \mathbb{K}^n en fonction de ses composantes dans B .

Exercice 30. Dans \mathbb{R}^4 , on considère le sous-espace vectoriel :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base B_F de F .
2. Compléter B_F en une base de \mathbb{R}^4 .
3. On pose $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 3, 4)$ et $\vec{w} = (-1, 0, -1, 0)$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle libre ?
4. Soit $G = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Quelle est la dimension de G ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 31. (DS mars 2013) Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ et $\vec{v}_2 = (1, 2, 4)$

1. Montrer que le vecteur $(x, 0, 1)$ appartient à $F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ pour une seule valeur de x à déterminer et calculer λ et μ tels que $(x, 0, 1) = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2$.
2. Notant $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer les coordonnées dans cette base de $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$
3. Déterminer trois réels (a, b, c) non tous nuls tels que $\vec{v} = (x, y, z)$ appartient à F si et seulement si $ax + by + bz = 0$.

Exercice 32. (DS mars 2012)

Dans \mathbb{R}^4 , on se donne les vecteurs suivants : $\vec{u}_1 = (1, 0, 1, -1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 1, 1, 2)$, $\vec{u}_3 = (1, -2, -3, -3)$, $\vec{v}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 0, 3)$.

1. Montrer que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est liée.
2. Donner une dimension et une base de :
 - (a) $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.
 - (b) $G = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.
3. Donner les coordonnées de \vec{u}_1 , \vec{u}_2 et \vec{u}_3 dans la base de F obtenue au 2(a).
4. Montrer que $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
5. En déduire la dimension de $F + G$.

Exercice 33. (DS mars 2014, légèrement modifié).

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \mathbb{K}^n et la famille $\mathcal{F}_n = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ de n vecteurs de \mathbb{K}^n définie par :

$$\vec{f}_i = \vec{e}_i + \vec{e}_{i+1} \text{ si } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } \vec{f}_n = \vec{e}_n + \vec{e}_1.$$

Par exemple, si $n = 2$, $\vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et \mathcal{F}_2 est liée.

1. Montrer que si $n = 3$, la famille \mathcal{F}_3 est libre. Est-elle une base de \mathbb{K}^3 ?
2. Montrer que si $n = 4$, la famille \mathcal{F}_4 est liée.
3. Traiter le cas $n \geq 5$ quelconque.

Exercice 34. On considère, dans \mathbb{R}^4 , les vecteurs :

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{e}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soient E l'espace vectoriel engendré par $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et F celui engendré par \vec{e}_4, \vec{e}_5 . Calculer les dimensions respectives de $E, F, E \cap F, E + F$.

Exercice 35. Dans \mathbb{R}^4 on considère les vecteurs

$$\vec{u} = (1, 0, 1, 0), \vec{v} = (0, 1, -1, 0), \vec{w} = (1, 1, 1, 1), \vec{x} = (0, 0, 1, 0) \text{ et } \vec{y} = (1, 1, 0, -1).$$

Soient $E = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $F = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$. Calculer les dimensions respectives de $E, F, E + F$ et $E \cap F$.

Exercice 36. Soient

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t\}.$$

Calculer les dimensions respectives de $E, F, E \cap F, E + F$.

Exercice 37. Dans $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, on considère trois sous-ensembles :

$$E_{00} = \{(u_n)_n \in \mathcal{F} \mid \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n = 0\},$$

$$E_0 = \{(u_n)_n \in \mathcal{F} \mid \lim u_n = 0\} \text{ et}$$

$$E_\infty = \{(u_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M\}.$$

1. Montrez que E_{00}, E_0 et E_∞ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. Montrez que $E_{00} \subset E_0 \subset E_\infty$ et que ces inclusions sont strictes.
3. Pour $i \in \mathbb{N}$ fixé, on définit la suite $\delta^i \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ par

$$\delta_n^i = \begin{cases} 1, & \text{si } n = i \\ 0, & \text{si } n \neq i \end{cases}$$

Montrez que la famille $(\delta^i, i \in \mathbb{N})$ est libre. En déduire que les espaces E_{00}, E_0 ou E_∞ ne sont pas de dimension finie.

Exercice 38. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$ et $h_a(x) = e^{ax}$, où $a \in \mathbb{R}$.

1. la famille (f, g) est-elle libre ou liée ?
2. Même question avec la famille (f, g, h_1) .

3. Même question avec la famille $(h_a, a \in \mathbb{R})$.

Exercice 39. Soit E l'ensemble des fonctions réelles deux fois dérivables sur \mathbb{R} vérifiant l'équation différentielle : $f'' + f = 0$.

1. Montrez que E est un espace vectoriel. Donnez une base de E .
2. Même question avec l'équation différentielle : $f'' - f = 0$.

Exercice 40. Soit

$$E = \{u = (u_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \forall n, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}.$$

1. Calculez les 10 premiers termes de la suite $u \in E$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ (on l'appelle *la suite de Fibonacci*).
2. Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
3. Montrez que l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(u) = (u_0, u_1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
4. Montrez que la suite de terme général x^n appartient à E si et seulement si $x^2 - x - 1 = 0$.
5. Soit x_1 et x_2 les deux racines réelles de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Soit e la suite de terme général x_1^n et soit f la suite de terme général x_2^n . Montrez que (e, f) forme une base de E et en déduire la forme générale d'une suite appartenant à E .
6. Déduire de ce qui précède que le terme général de la suite de Fibonacci est

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Exercice 41. Soient $F = \{u = (u_n)_{n \geq 0} \mid \forall n, u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n\}$ et $G = \{u = (u_n)_{n \geq 0} \mid \forall n, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n\}$ deux sous-ensembles de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

1. Montrez que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. Déterminez $F \cap G$.
3. En vous inspirant de l'exercice précédent, montrez que F et G sont de dimension 2 et déterminez une base de chacun d'eux.

Matrices

Exercice 42. On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB , BC , $(AB)C$, et $A(BC)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 43. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB puis BA . Que remarque-t-on ?

Exercice 44. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2 et B^3 . En déduire la valeur de B^n , pour tout entier naturel n .
2. Pour tout entier naturel n , calculer $(B + I_3)^n$ (on utilisera la formule du binôme).
3. En déduire A^n pour tout entier naturel n .

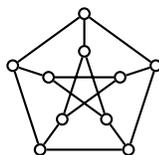
Exercice 45. Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe G à n sommets, sans boucles et sans arêtes multiples. La matrice A est carrée de taille n , de coefficients 0 ou 1, avec $A_{i,j} = 1$ si et seulement si i et j sont reliés par une arête.

1. Montrez que le coefficient (i, j) de A^2 est égal au nombre de chemins de longueur 2 du graphe allant de i à j (où un chemin est une succession d'arêtes, et sa longueur est le nombre d'arêtes parcourues).
2. Généralisez cette interprétation à A^k , $k \geq 3$.
3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dessinez le graphe dont A est la matrice d'adjacence, puis calculez A^2 et A^3 en vous aidant du graphe.

4. Soit A la matrice d'adjacence du graphe suivant (appelé le *graphe de Petersen*) :



Démontrez, en utilisant l'interprétation en termes de chemins, que

$$A^2 + A - 2I = J$$

où J est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exercice 46. Montrez que, pour tout $A \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.

Exercice 47. Montrez que le produit de deux matrices carrées diagonales est encore une matrice diagonale, et que le produit de deux matrices carrées triangulaires supérieures est aussi triangulaire supérieure.

Exercice 48. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et calculer le cas échéant leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 49. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $AB = AC$. A-t-on $B = C$? La matrice A est-elle inversible?
2. Déterminer toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$.

Exercice 50. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 51. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrez que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et que dans ce cas, son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 52. Calculer les puissances des matrices suivantes (a et b sont des nombres réels ou complexes quelconques)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 53. Déterminez le rang des matrices suivantes, puis déduisez-en la dimension du noyau et de l'image de chacune de ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 54. Pour chacune des matrices dans Exercice ??, déterminez son noyau et donnez une base de son image.

Exercice 55. Déterminez le rang des matrices suivantes, où $\lambda, a, b, p, q, r \in \mathbb{K}$ sont des paramètres.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 56. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Rappelez la preuve de l'inégalité $\text{rang}(AB) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$.
2. Donnez un exemple de deux matrices A, B telles que $\text{rang}(AB) < \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$.
3. Supposons que la matrice B est *inversible* (en particulier $n = p$). Montrez $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)$.

Exercice 57. Soit n un entier naturel non nul. Pour $1 \leq i, j \leq n$ deux entiers, on note $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) (ligne i colonne j) qui vaut 1. On appelle *matrice de transvection* (resp. *matrice de dilatation*) toute matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $T_{ij}(\lambda) := I_n + \lambda E_{ij}$ avec $1 \leq i \neq j \leq n, \lambda \in \mathbb{K}$ (resp. de la forme $D_i(\lambda) := I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ avec $1 \leq i \leq n, \lambda \in \mathbb{K}$). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Les matrices $D_i(\lambda), T_{ij}(\lambda)$ sont-elles inversibles ?
2. Montrez que la multiplication de A à droite par $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la colonne j de A par λ ;
3. Montrez que la multiplication de A à droite par $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne C_j de A par $C_j + \lambda C_i$.
4. Pour $1 \leq i \neq j \leq n$, donnez une matrice P_{ij} , indépendante de A , telle que la multiplication de A à droite par P_{ij} ait pour effet d'échanger la colonne i et la colonne j de A .
5. Comparez les produits $D_i(\lambda)A, T_{ij}(\lambda)A, P_{ij}A$ avec la matrice A .

Exercice 58. Montrez que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminez leur dimension :

1. L'ensemble des matrices diagonales
2. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures)
3. $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T = A\}$ (l'ensemble des matrices symétriques)
4. $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T = -A\}$ (l'ensemble des matrices antisymétriques)

Exercice 59. Notons

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

On note \mathcal{J} le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $\{J^k, k \in \mathbb{N}\}$. Quelle est la dimension de \mathcal{J} ? Si $A, B \in \mathcal{J}$ montrez que le produit AB appartient à \mathcal{J} .

Applications linéaires, sommes directes

Exercice 60. Soit l'application $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f((x, y, z)) = (2x + y + z, x + 2y + z, 3x + 3y + 2z).$$

1. Montrez que f est une application linéaire.
2. Déterminez une matrice A telle que $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et en déduire la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Donner des bases de l'image et du noyau de f . Quel est le rang de f ?
4. Soit $\vec{v} = f(\vec{u})$ un élément de l'image de f , montrez que l'image réciproque de \vec{v} par f et l'ensemble $\{\vec{u} + \vec{w} \mid \vec{w} \in \text{Ker}(f)\}$.
5. En déduire l'ensemble des solutions du système

$$(S) \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Exercice 61. Soit u l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$u(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z).$$

1. Montrez que u est linéaire et donnez la matrice de u dans les bases canoniques.
2. Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 . Montrez que $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2))$ est une base de \mathbb{R}^4 .
3. Écrire la matrice de u dans les bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2))$.

Exercice 62. Soient trois vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ formant une base de \mathbb{R}^3 . On note T la transformation linéaire définie par $T(\vec{e}_1) = T(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$, $T(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

1. Écrire la matrice A de T dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ puis déterminer le noyau de cette application.
2. On pose $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Les vecteurs $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ forment-ils une base de \mathbb{R}^3 ?
3. Calculer $T(\vec{f}_1), T(\vec{f}_2), T(\vec{f}_3)$ en fonction de $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Écrire la matrice B de T dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ et trouver la nature de l'application T .
4. Écrire la matrice de passage P de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, calculer son inverse P^{-1} , puis écrire et vérifier la relation qui lie les matrices A, B, P et P^{-1} .

Exercice 63. (Exercice 1 du DST 2013) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases}$$

1. Montrer que \mathcal{B}' est une base de E
2. Calculer $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$ et en déduire la matrice D de f dans la base \mathcal{B}' .
3. Déterminer le noyau et l'image de f
4. Exprimer la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et calculer P^{-1} .
5. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
6. Calculer A^n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 64. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = ((1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$.

Exercice 65. (Extrait de l'examen deuxième session 2016)
Soit

$$f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_1, x_2)$$

1. Quelle est la matrice M de f dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{C}^3 ?
2. Soit $j = e^{2i\pi/3}$. Soit $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, j, j^2)$ et $\vec{e}_3 = (1, j^2, j)$. Calculez $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$ en fonction de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.
3. Soit $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Montrez que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{C}^3 .
4. Donnez la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , la matrice M' de f dans la base \mathcal{B}' , et la relation qui lie M, M', P et P^{-1} .

Exercice 66. (Extrait de l'examen deuxième session 2016)
Dans \mathbb{R}^4 , on considère les sous-espaces vectoriels :

$$E = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)), \\ F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}, \\ G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$$

1. Déterminer une base et la dimension de F et de G (justifiez votre réponse).
2. Même question pour $E \cap F$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^4 = (E \cap F) \oplus G$

Exercice 67. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, et soit U et V deux sous-espaces vectoriels de E de bases respectives \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

1. Montrez que, si $E = U \oplus V$, alors $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E .
2. Réciproquement, montrez que, si $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E alors $E = U \oplus V$.

Exercice 68. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $p : E \rightarrow E$ une application linéaire vérifiant $p^2 = p$. On dit que p est un *projecteur* ou une *projection*.

1. Montrez que $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{\vec{0}\}$

2. En déduire que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.
3. Montrez que, si $\vec{x} \in E$ s'écrit $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \text{Ker}(p)$ et $\vec{v} \in \text{Im}(p)$, alors $p(\vec{x}) = \vec{v}$.
4. Soit \mathcal{B} une base de $\text{Ker}(p)$ et \mathcal{B}' une base de $\text{Im}(p)$. Quelle est la matrice de p dans la base $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ de E ?
5. Montrer que $\text{Id} - p$ est aussi une projection.
6. Montrer que $\text{Im}(\text{Id} - p) = \text{Ker}(p)$ et $\text{Ker}(\text{Id} - p) = \text{Im}(p)$.

Exercice 69. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et s un endomorphisme de E involutif, c'est-à-dire tel que $s^2 = \text{Id}$. On pose $U = \text{Ker}(s - \text{Id})$ et $V = \text{Ker}(s + \text{Id})$.

1. Montrer que $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
2. Montrer que, pour tout $\vec{x} \in E$, $(\vec{x} + s(\vec{x}))/2 \in U$ et $(\vec{x} - s(\vec{x}))/2 \in V$.
3. Déduire des questions précédentes que $E = U \oplus V$.
4. Montrez que, si $\vec{x} \in E$ s'écrit $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in U$ et $\vec{v} \in V$, alors $s(\vec{x}) = \vec{u} - \vec{v}$.
5. Soit \mathcal{B} une base de $\text{Ker}(p)$ et \mathcal{B}' une base de $\text{Im}(p)$. Quelle est la matrice de p dans la base $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ de E ?

On dit que s est la symétrie par rapport à U parallèlement à V . Donnez une interprétation géométrique de cette terminologie.

Soit s la symétrie de \mathbb{R}^3 par rapport au plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$. Calculez les coordonnées de $s((x_1, x_2, x_3))$.

Exercice 70. Dans \mathbb{R}^3 , déterminer une base de F , puis donnez un sous-espace E tel que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ (on dit que E est un *supplémentaire* de F).

1. $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (2, 1, 1)$,
2. $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{u} = (-1, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, 1)$,
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 71. Notons $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T = A\}$ et $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T = -A\}$ où A^T désigne la transposée de A . Quelles sont les dimensions de \mathcal{S} et \mathcal{A} ? Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Exercice 72. Montrer que les sous-ensembles $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$ et $H = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = G \oplus H$.