| | | |
|---|---|---|
| université de BORDEAUX | ANNEE UNIVERSITAIRE 2021/2022<br>CODE UE : 4TPM210 U<br><br>**TD Analyse** | Collège Sciences &Technologies |

Table des matières



Le site interactif de ressources multimédia en ligne, le serveur `WIMS`, sera également utilisé pour la « pratique » active des exercices. **La moyenne des exercices wims est prise en compte dans la note de contrôle continu.**

Des annales ainsi que le poly et des compléments de cours sont disponibles sur la plate-forme `Moodle`.

Les exercices les plus difficiles de ce recueil sont repérés par une étoile $*$.

## 1. Exercices chapitre 1

**Exercice 1** (suites arithmétiques, suites géométriques)**.**

(1) *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite arithmétique de raison* $2$*, telle que* $u_5 = 7$*. Calculer* $u_{100}$*.*

(2) *Quelle est la somme des* $n$ *premiers termes d'une suite arithmétique ?*

(3) *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite géométrique de raison* $q$ *strictement positive, telle que* $u_3 = 2$ *et* $u_7 = 18$*. Calculer* $u_{20}$*.*

(4) *Quelle est la somme des* $n$ *premiers termes d'une suite géométrique ?*

**Exercice 2** (suites réelles)**.** *Montrer à l'aide de la définition que la suite de terme général* $u_n = 3n/(4n+2)$ *(pour* $n \geq 0$*) converge et calculer sa limite. Les réponses doivent être justifiées.*

**Exercice 3** (opérations sur les limites de suites réelles)**.** *La suite de terme général* $u_n$ *(pour* $n$ *suffisamment grand), dans chaque cas suivant, est-elle divergente ? convergente ? Calculer sa limite le cas échéant :*

$$\text{a)}\quad u_n = \frac{4n^5}{6n^7 - 5n^3 + n^2 - 4}\ ; \quad \text{b)}\ u_n = \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2+1}\ ;$$

$$\text{c)}\quad u_n = \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+2} - n\right)}\ ; \quad \text{d)}\ u_n = \frac{2n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+3} - n}\ ;$$

$$\text{e)}\quad u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}\ ; \quad \text{f)}\ u_n = n^{1/n}\ ; \quad \text{g)}\ u_n = \frac{e^n}{n^n}\ ;$$

$$\text{h)}\quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\ ; \quad \text{i)}\ u_n = \frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}\ ;$$

$$\text{j)}\quad u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}\ ; \quad \text{k)}\ u_n = \sin(n).$$

*Les réponses doivent être justifiées.*
*Pour la dernière suite, on pourra supposer que la suite converge puis en considérant les suites* $(\sin(n+1))$ *et* $(\sin(n-1))$ *montrer que la limite est nécéssairement 0 et enfin conclure en obtenant une contradiction.*

**Exercice 4.** *En revenant à la définition de limite montrer les deux résultats suivants du cours.*

(1) *Si la suite* $(u_n)_n$ *converge vers* $\ell > 0$ *alors il existe un entier* $N$ *tel que pour tout* $n \geq N$*,* $u_n \geq \frac{\ell}{2}$*. (On pourra commencer par faire un dessin)*

(2) *Si* $(u_n)$ *converge vers* $\ell$ *et* $(v_n)_n$ *converge vers* $\ell'$ *alors* $(u_n + v_n)$ *converge vers* $\ell + \ell'$*.*

**Exercice 5.** *Montrer qu'une suite à valeurs dans* $\mathbb{Z}$ *est convergente si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.*

**Exercice 6** (moyenne de Cesàro*)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 1}$ *une suite de nombres réels. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose*

$$c_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}.$$

*On dit que* $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge au sens de Cesàro si la suite* $(c_n)_{n\geq 1}$ *converge.*

(1) *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 1} = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ *converge au sens de Cesàro vers une limite que l'on déterminera. La suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est-elle convergente ?*

(2) *Montrer que si* $(u_n)_{n\geq 1}$ *convergente vers* $l$ *alors* $(c_n)_{n\geq 1}$ *est également convergente de limite* $l$.

(3) *Appliquer le résultat précédent à l'étude des suites suivantes (données par l'expression de leur terme général) :*

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{\ln k}{k}},\ n \geq 1\ ; \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k},\ n \geq 1\ ; \quad w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k,\ n \geq 1.$$

**Exercice 7** (suites réelles)**.** *On considère les suites de terme général respectivement*

$$\frac{2+\cos n}{n}, \quad (2+\cos n)\, n, \quad (-1)^n\,(2+\cos n)\, n, \quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \quad (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

*pour* $n \geq 1$.

(1) *Les suites ci-dessus sont-elles bornées ?*

(2) *Sont-elles convergentes ?*

**Exercice 8** (suites réelles)**.** *On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\,\pi + \frac{1}{n}$.

(1) *La suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est-elle bornée ?*

(2) *La suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est-elle convergente ?*

(3) *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $v_n = \sin(u_n)$ *converge vers* $0$.

**Exercice 9.** *La proposition suivante est-elle vraie ou fausse (justifier la réponse) ?*

(1) *Toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.*

(2) *Toute suite qui a une limite strictement positive a tous ses termes strictement positifs à partir d'un certain rang.*

**Exercice 10.** *Soit* $(u_n)$ *une suite croissante et non majorée.*

(1) *Traduire avec des quantificateurs que la suite est non majorée.*

(2) *Avec la croissance, en déduire qu'elle tend vers* $+\infty$.

(3) *Donner un exemple de suite non majorée et qui ne tend pas vers* $+\infty$.

**Exercice 11.** *Pour chacun des ensembles* $A$, $B$, $C$ *et* $D$ *suivants*

$$A = \{0, 1, 3, 15, -7\}, \quad B = [-1, 3], \quad C = ]2, 3], \quad D = ]-2, 3] \cup [4, 5[.$$

*dire*

— *s'ils sont majorées ou minorés,*
— *s'ils ont un plus grand ou un plus petit élément ; si oui le préciser,*
— *s'ils ont une borne supérieure ou une borne inférieure.*

**Exercice 12.** *Pour chacun des ensembles suivants, montrer qu'il est borné puis déterminer la borne supérieure (préciser si c'est un maximum) et la borne inférieure (préciser si c'est un minimum).*

$$A = \{\frac{4}{x} - 3\ ,\ x \in [1, 2[\}\ ; \quad B = \{-2\} \cup ]0, 3] \cup \{4\}\ ; \quad A \cap B.$$

**Exercice 13.** *Etudier l'existence des bornes inférieure et supérieure des ensembles suivants. Les déterminer si elles existent et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.*

$$\begin{aligned} A &= \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in ]1,3],\ y = \frac{1}{x}\},\\ B &= \{(x+1)^2\ ,\ x \in ]-2,3]\},\\ C &= \{z \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ z = n^2+1\},\\ D &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x = 1 - \frac{1}{n}\}. \end{aligned}$$

**Exercice 14.** *Justifier que l'ensemble* $E = \{2\sin x + 3\cos x\ ,\ x \in \mathbb{R}\}$ *admet une borne supérieure. Puis montrer que c'est un maximum et qu'elle vaut* $\sqrt{13}$.

**Exercice 15.** *Soit* $p$ *un nombre réel strictement positif. On pose :*

$$A = \left\{\frac{1}{1+|x|} \in \mathbb{R}\ ,\ |x| < p\right\},\ B = \left\{\frac{1}{1+|x|} \in \mathbb{R}\ ,\ |x| > p\right\}.$$

*(1) Déterminer* $\sup A$. *L'ensemble* $A$ *admet-il un maximum ?*

*(2) Déterminer* $\sup B$. *L'ensemble* $B$ *admet-il un maximum ?*

**Exercice 16.** *Soit* $f$ *l'application définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{x+2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. *Montrer que* $A = f(]0,+\infty[)$ *est borné et que* $\sup(A) = \dfrac{1}{2}$. *Déterminer de même* $\inf(B)$.

**Exercice 17** (suites réelles)**.** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+1}.$$

*Soit* $n \geq 1$, *montrer que pour tout entier* $k$ *tel que* $n+1 \leq k \leq 2n$ *on a* $\dfrac{k}{k^2+1} \geq \dfrac{n+1}{(2n)^2+1}$ *; puis que*

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{4}.$$

*En déduire que* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

**Exercice 18** (suites réelles)**.** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k^3+1}$$

*Montrer pour tout* $n \geq 1$ *on a*

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{8}$$

*En déduire que* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

**Exercice 19.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *la suite de nombres réels définie par les relations suivantes :* $u_0 \in ]0,1]$ *et*

$$\forall n \geq 0, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}.$$

*(1) Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $0 < u_n \leq 1$.

(2) *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est monotone. En déduire qu'elle est convergente.*

(3) *Déterminer la limite de la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ .

**Exercice 20** (suites réelles)**.** *On considère la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \quad \forall\, n \geq 0. \end{cases}$$

*On va étudier de différentes façon la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et montrer qu'elle converge.*

(1) *Façon 1 :*

  (a) *Montrer que pour tout entier* $n$, $u_{n+1} - u_n$ *est du signe de* $3 - u_n$.

  (b) *Montrer par récurrence que tout entier* $n$, $u_n \leq 3$.

  (c) *En déduire que la suite est croissante puis qu'elle converge et déterminer sa limite.*

(2) *Façon 2 :*

  (a) *On définit sur* $\mathbb{R}_+$ *la fonction* $f$ *par* $f(x) = \sqrt{6+x}$. *Etudier les variations de* $f$ *et montrer que* $f([0,3]) \subset [0,3]$.

  (b) *Vérifier que* $u_0 \leq u_1$ *puis montrer par récurrence que la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est croissante et majorée par 3.*

  (c) *En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.*

(3) *Façon 3 :*

  (a) *Si la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge, quelle est la seule valeur possible pour sa limite ?*

  (b) *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|.$$

  (c) *En déduire par récurrence que pour tout entier* $n$, $|u_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *puis que la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge vers 3.*

**Exercice 21** (suites réelles)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite de nombres réels définie par la condition initiale* $u_1 = 1$ *et la relation de récurrence*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}.$$

*En vous inspirant de l'exercice 20, proposer diverses méthodes pour montrer que la suite converge vers 2.*

**Exercice 22.** *Soit* $a > 0$ *et soit* $(u_n)_n$ *la suite de nombres réels définie par* $u_0 > 0$ *et*

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a}{u_n}\Big).$$

(1) *Montrer que*

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$

(2) *Montrer que pour tout* $n \geq 1$ *on a* $u_n \geq \sqrt{a}$ *et que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*

(3) *En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.*

(4) *En utilisant la relation* $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$, *montrer que*

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \leq \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^2.$$

(5) *Si* $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ *et pour* $n \geq 1$, *montrer que*

$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\Big(\frac{k}{2\sqrt{a}}\Big)^{2^{n-1}}.$$

(6) *Application : calculer* $\sqrt{10}$ *avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant* $u_0 = 3$.

**Exercice 23.** *Soit* $(H_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

(1) *Montrer, pour tout* $k \geq 1$,

$$\forall t \in [k, k+1] \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

*puis en utilisant une intégrale, l'inégalité double*

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

(2) *En déduire que* $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

(3) *Déterminer la limite de* $(H_n)$.

(4) *Montrer que la suite de terme général* $u_n := H_n - \ln(n)$ *converge (indication : on montrera que* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante).*

**Exercice 24** (suites réelles adjacentes)**.**

(1) *Démontrer qu'une suite réelle* $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge si et seulement si* $(u_{2n})_{n\geq 0}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ *convergent vers une même limite.*

(2) *Pour* $n \geq 1$, *on pose*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

*Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge (indication : on pourra montrer que les suites* $(u_{2n})_{n\geq 0}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$ *sont adjacentes).*

**Exercice 25** (suites réelles adjacentes)**.** *Soient* $0 < a < b$, *soient* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *les deux suites définies par*

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

*Le but de cet exercice est de montrer que ces suites sont adjacentes.*

(1) *Montrer que pour tous réels* $x$ *et* $y$ , $2\sqrt{x}\sqrt{y} \leq x + y$.

(2) *Montrer que pour tout entier* $n$, $u_n \leq v_n$ *puis que la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est croissante et la suite* $(v_n)_{n\geq 0}$ *est décroissante.*

(3) *En déduire que les deux suites convergent.*

*(4) On note* $\ell$ *la limite de* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $\ell'$ *celle de* $(v_n)_{n\geq 0}$*, montrer directement que* $\ell = \ell'$.

**Exercice 26** (suites réelles adjacentes). *On considère les deux suites de terme général*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!\, n} \quad (n \geq 1).$$

*(1) Montrer que les suites* $(u_n)_{n\geq 1}$ *et* $(v_n)_{n\geq 1}$ *sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite, notée e.*

*(2) Montrer que e est irrationnel. Indication : on pourra supposer qu'il existe* $p \in \mathbb{N}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $e = \frac{p}{q}$ *puis obtenir une contradiction en utilisant, après l'avoir justifié, que* $u_q < \frac{p}{q} < v_q$.

**Exercice 27.** *(1) Ecrire à l'aide des quantificateurs la définition d'une suite majorée.*

*(2) En déduire la définition d'une suite non majorée.*

*(3) Donner un exemple de suite non majorée et qui ne tend pas vers* $+\infty$.

*(4) Soit* $(u_n)$ *une suite non majorée, montrer qu'elle admet une sous-suite qui tend vers* $+\infty$.

**Exercice 28** (suites de Cauchy).

*(1) Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *de terme général* $u_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ *n'est pas une suite de Cauchy.*

*(2) Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *de terme général* $u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$ *est de Cauchy.*

*(3) Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *de terme général* $u_n = \displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k}$ *n'est pas une suite de Cauchy (Indication : on pourra considérer* $u_{2n} - u_n$*). Que peut-on dire de cette suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *lorsque* $n \to +\infty$ *?*

*(4) Montrer qu'une suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *vérifiant* $|u_{n+1} - u_n| \leq 2^{-n}$ *pour tout* $n \geq 0$ *est de Cauchy. Pour cela pour* $n \in \mathbb{N}$ *fixé arbitrairement, montrer que*

*(a)* $\forall p \geq 1,\ |u_{n+p} - u_n| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} |u_{n+k+1} - u_{n+k}|$.

*(b)* $\forall p \geq 1,\ |u_{n+p} - u_n| \leq 2^{-n} \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (2^{-1})^k$ *puis que* $\forall p \geq 1,\ |u_{n+p} - u_n| \leq 2^{1-n}$.

*(c) Conclure.*

**Exercice 29** (suites de Cauchy). *Soit f une application de* $[0,1]$ *dans lui-même telle qu'il existe un nombre réel positif* $0 < k < 1$ *tel que*

$$\forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|\,.$$

*Soit* $a \in [0,1]$. *On considère la suite* $(x_n)_{n\geq 0}$ *définie par* $x_0 = a$, *et* $x_n = f(x_{n-1})$ *pour tout* $n \geq 1$.

*(1) Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n\,|x_1 - x_0|$.

*(2) Comme dans l'exercice 28, montrer que pour tout entier $n$*

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad |x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{k=0}^{p-1} |x_{n+k+1} - x_{n+k}|$$

*puis que*

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad |x_{n+p} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$$

*et conclure que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.*

*(3) Montrer que $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$ est l'unique point fixe de la fonction $f$.*

**Exercice 30** (suites récurrentes)**.** *On considère la fonction $f\ : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall\, x \geq 0,\ f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}.$$

*(1) Montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$ et que $f([1,+\infty[) \subset [1,+\infty[$.*

*(2) Montrer que l'on peut bien définir une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de $[0,1]$ par la condition initiale $x_0 \in ]0,1[$ et la relation de récurrence*

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall\, n \geq 0.$$

*(3) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ainsi définie est une suite croissante. En déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.*

*(4) Etudier le comportement de la suite définie avec la même relation de récurrence et avec pour premier terme $x_0 > 1$.*

**Exercice 31** (suites récurrentes)**.** *Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par*

$$\begin{cases} u_0 \in [1,+\infty[ \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(u_n^2 + 7u_n)} - 1 \quad \forall\, n \geq 0. \end{cases}$$

*On distinguera les cas $u_0 = 1$, $1 < u_0 < 2$, $u_0 = 2$ et $u_0 > 2$.*

**Exercice 32** (densité des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$)**.** *On va montrer qu'entre deux réels il y a toujours un rationnel ; qu'entre deux réels il y a toujours un irrationnel.*

*Soient deux réels $x$ et $y$ tels que $x < y$.*

*(1) On cherche $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $x < \frac{p}{q} < y$.*

*(a) Montrer qu'une condition suffisante sur $p$ et $q$ est $qx < p < qy$ et $q(y-x) > 1$.*

*(b) Justifier l'existence de $p$ et $q$.*

*(2) On cherche $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < \alpha < y$. Justifier l'existence d'un tel $\alpha$ en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et $x + \sqrt{2} < y + \sqrt{2}$.*

*(3) Déduire de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ que pour tout réel $a$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_n$ qui converge vers $a$.*

**Exercice 33** (développement décimal*)**.** *Soit $x$ un réel, pour tout entier $n$, on note $d_n = \mathrm{E}(10^n x)$ où $\mathrm{E}$ désigne la partie entière.*

*(1) Justifier que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d_n \leq 10^n x < d_n + 1.$$

*puis que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 10d_n \leq d_{n+1} \leq 10^{n+1}x < d_{n+1} + 1 \leq 10d_n + 10.$$

*(2) On pose $u_n = \frac{d_n}{10^n}$ et $v_n = \frac{d_n+1}{10^n}$. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes et qu'elles convergent vers $x$.*

*$u_n$ est la valeur décimale approchée de $x$ à $10^{-n}$ près par défaut, $v_n$ par excès.*

*(3) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $x_n = d_n - 10d_{n-1}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = u_{n-1} + \frac{x_n}{10^n}$, puis que $u_n = d_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{10^k}$. Soit, lorsque $u_n \geq 0$, selon la notation décimale usuelle : $u_n = d_0, x_1 x_2 \cdots x_n$.*

*(4) Si pour tout $n \geq 1$, $x_n = 9$ que vaut $x$ ?*

*Nous allons montrer qu'avec la définition prise pour la suite $(d_n)$ les termes de la suite $(x_n)$ ne peuvent pas tous être égaux à 9 à partir d'un certain rang.*

*Supposons qu'il existe un entier $n_0$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $x_n = 9$, montrer qu'alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}} - \frac{1}{10^n}$. En déduire que $x = u_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}$, est-ce possible ?*

*(5) On suppose maintenant que $x \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$. Les suites $(d_n)$, $(u_n)$ et $(x_n)$ sont définies comme précédemment.*

*(a) Montrer que $d_0$ $(= u_0)$ est le quotient de la division euclidienne de $p$ par $q$. On note $r_0$ le reste de cette division, on a donc $p = d_0 q + r_0$ avec $r_0$ unique entier tel que $0 \leq r_0 < q$.*

*(b) En utilisant que par définition, $u_1 \leq u_0 + \frac{r_0}{q} < u_1 + \frac{1}{10}$ et que $u_1 = u_0 + \frac{x_1}{10}$ ; montrer que $x_1$ est le quotient de la division euclidienne de $10r_0$ par $q$. On note $r_1$ le reste de cette division, on a donc $10r_0 = x_1 q + r_1$ avec $r_1$ unique entier tel que $0 \leq r_1 < q$.*

*(c) Montrer que l'on peut construire par récurrence la suite d'entiers $(r_n)$ tels que $r_0$ est le reste de la division euclidienne de $p$ par $q$ et pour tout $n \geq 1$, $r_n$ est le reste de la division euclidienne de $10r_{n-1}$ par $q$, le quotient étant alors égal à $x_n$.*

*(d) En déduire une autre façon de déterminer le développement décimal de $x = \frac{p}{q}$. Le mettre en pratique pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{7}$, que remarquez-vous ?*

*(e) Justifier que le développement décimal de tout rationnel est illimité et périodique à partir d'un certain rang.*

*Nous ne le ferons pas ici, mais on peut montrer que la réciproque est vraie.*

## 2. Exercices chapitre 2

**Exercice 34.** *Montrer, en s'inspirant de ce qui a été fait pour les suites, que si une fonction $f$ admet une limite $\ell$ en $x_0$ alors cette limite est unique.*

**Exercice 35** (limites d'une fonction réelle)**.** *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$. Calculer les limites :*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x)+x).$$

**Exercice 36** (limites d'une fonction réelle)**.** *En revenant à la définition, démontrer :*

$$\lim_{x\to 1} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 2.$$

**Exercice 37** (continuité des fonctions réelles)**.** *Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x\ln(|x|) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} .$$

**Exercice 38** (continuité des fonctions réelles)**.** *Montrer que la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

*est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.*

*Indication : on pourra utiliser que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

**Exercice 39** (continuité des fonctions réelles*)**.** *Montrer que deux fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur $\mathbb{Q}$ coïncident en fait sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

**Exercice 40** (continuité des fonctions réelles*)**.** *Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. *Montrer que $f(0) = 0$.*
2. *Montrer que que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(px) = pf(x)$.*
3. *Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $r \in \mathbb{Q}$, calculer $f(p)$, $f(1/p)$, $f(r)$ en fonction de $f(1)$.*
4. *On suppose de plus que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax.$$

5. *En utilisant ce qui précède, déterminer toutes les fonctions $g : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$, continues sur $]0,+\infty[$ et telles que*

$$\forall x \in ]0,+\infty[,\ \forall y \in ]0,+\infty[,\ g(xy) = g(x) + g(y)$$

*(on pourra considérer pour ce faire la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(e^x)$).*

**Exercice 41** (continuité des fonctions réelles)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

*Montrer que $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.*

*Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout entier $n$, et tout réel $x$, $f(x) = f(\frac{x}{2^n})$.*

**Exercice 42** (continuité des fonctions réelles)**.**

(1) *Soit $f$ une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert $I$, et soit $x_0 \in I$. On suppose que $f$ est continue en $x_0$ et que $f(x_0)$ est strictement positif. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $J$ contenant $x_0$ tel que*

$$\forall x \in I \cap J, \quad f(x) > 0.$$

(2) *En déduire que si $g$ et $h$ sont deux fonctions réelles sur $I$, continues en $x_0$, telles que $g(x_0) \neq h(x_0)$, alors il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que*

$$\forall x \in V, \quad g(x) \neq h(x).$$

**Exercice 43** (continuité)**.** *Donner l'allure du graphe de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Peut-on prolonger $f$ par continuité en 0 ? (justifier la réponse)*

**Exercice 44** (continuité des fonctions réelles, uniforme continuité*)**.**

(1) *Soit $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. En utilisant la définition, démontrer la continuité de la fonction $f$ sur le segment $I_a = [0, a]$, $a > 0$. Indication : étudier la continuité de $f$ au voisinage de chaque point $x_0$ de $I_a$ (considérer les deux cas $x_0 = 0$ et $x_0 > 0$).*

(2) *La fonction $f$ est-elle uniformément continue sur le segment $I_a$ ? Énoncer le résultat du cours correspondant.*

(3) *La fonction $f$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ ?*

(4) *Donner un exemple d'une fonction $g$, continue sur $\mathbb{R}_+$, uniformément continue sur tout segment $I_a$, $a > 0$, mais qui ne soit pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.*

**Exercice 45** (théorème des valeurs intermédiaires (TVI))**.**

(1) *Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Montrer que si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe au moins un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.*

(2) *Soit $P$ un polynôme à coefficients réels de degré impair ; le polynôme $P$ admet-il au moins une racine réelle ?*

**Exercice 46** (théorème des valeurs intermédiaires (TVI))**.** *Soient $p$ et $q$ deux réels strictement positifs et $f$ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer de deux façons "différentes" qu'il existe au moins un point $c \in [a, b]$ tel que*

$$p\, f(a) + q\, f(b) = (p + q)\, f(c).$$

(1) *En considérant la fonction réelle $g$ définie sur $[a, b]$ par*

$$\forall\, x \in [a, b],\ g(x) = p\, f(a) + q\, f(b) - (p + q)\, f(x),$$

*montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.*

(2) *Sans perte de généralité on peut supposer que $f(a) \leq f(b)$ (sinon remplacer $f$ par $-f$). Justifier que $\frac{p}{p+q} f(a) + \frac{q}{p+q} f(b) \in [f(a), f(b)]$ puis conclure.*

(3) *Pour la culture : démontrer que*

$$[a, b] = \{(1 - t)a + tb\ ,\ t \in [0, 1]\} = \left\{ \frac{p}{p+q} a + \frac{q}{p+q} b\ ,\ (p, q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \text{ et } p + q \neq 0 \right\}.$$

**Exercice 47** (théorème des valeurs intermédiaires (TVI)*)**.** *Soit $f\ :[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$ et soit $p\in\mathbb{N}^*$ un entier non nul fixé. On va montrer qu'il existe au moins un point $x_p\in[0,1-\frac{1}{p}]$ tel que*

$$f\Big(x_p+\frac{1}{p}\Big)=f(x_p).$$

*(1) Traiter le cas $p=1$.*

*(2) Pour $p\geq 2$, on pose $g\ :x\in[0,1-\frac{1}{p}]\mapsto f\big(x+\frac{1}{p}\big)-f(x)$.*

*(a) Pour $p=2$ calculer $g(0)$ et $g(\frac{1}{2})$ puis conclure.*

*(b) Pour $p\geq 3$, le calcul de $g(0)$ et $g(1-\frac{1}{p})$ permet-il de conclure comme précédemment ?*

*(c) Pour $p\geq 3$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}g(\frac{k}{p})$ puis en déduire qu'il existe $k_1$ tel que $g(\frac{k_1}{p})\geq 0$ et $k_2$ tel que $g(\frac{k_2}{p})\leq 0$. Conclure.*

**Exercice 48** (théorème des valeurs intermédiaires, extréma de fonctions continues*)**.** *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les quatre assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*

— *(i) : l'image par $f$ d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est encore un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ;*

— *(ii) : l'image par $f$ d'un segment de $\mathbb{R}$ est encore un segment de $\mathbb{R}$ ;*
*(On appelle segment un intervalle fermé et borné.)*

— *(iii) : l'image par $f$ d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ est encore un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ ;*

— *(iv) : l'image réciproque par $f$ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est encore un intervalle de $\mathbb{R}$.*

*Justifier les réponses.*

**Exercice 49** (extréma de fonctions continues)**.** *Le but de cet exercice est de montrer qu'une fonction $f\ :[0,+\infty[\to[0,+\infty[$, continue sur $[0,+\infty[$ et tendant vers $0$ lorsque $x$ tend vers l'infini, est toujours bornée sur son intervalle de définition $[0,+\infty[$ et atteint toujours sa borne supérieure $\sup_{[0,+\infty[}f$.*

*(1) Faire un dessin.*

*(2) Si $f$ est la fonction nulle, le résultat est évident. On suppose $f$ non identiquement nulle, en déduire qu'il existe $a\geq 0$ tel que $f(a)>0$.*

*(3) Justifier qu'il existe $A>0$ avec $A\geq a$ tel que, pour tout $x>A$, $f(x)<f(a)$.*

*(4) En déduire que $f$ est bornée et que $\sup_{[0,+\infty[}f=\sup_{[0,A]}f$ puis conclure.*

*(5) Atteint-elle par contre toujours sa borne inférieure sur $[0,+\infty[$ ? Si ce n'est pas le cas, exhiber un contre-exemple.*

**Exercice 50** (extréma de fonctions continues)**.** *Montrer qu'une fonction $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et périodique (c'est-à-dire telle qu'il existe $T>0$ avec $f(x+T)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$), est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes.*

*Indication : on pourra commencer par considérer la restriction de $f$ à l'intervalle $[0,T]$.*

**Exercice 51** (continuité, injectivité et monotonie)**.** *On considère la fonction $g\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par*

$$g(x)=\begin{cases}x \text{ si } x\in\mathbb{Q}\\ 1-x \text{ si } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

(1) *Montrer que* $g([0,1]) \subset [0,1]$.

(2) *Montrer que* $g\ : [0,1] \to [0,1]$ *est une application bijective.*

(3) *Montrer que* $g$ *n'est pas monotone sur* $[0,1]$ *et que* $g$ *n'est pas non plus continue sur* $[0,1]$ *(se référer aussi à l'exercice 38 ci-dessus).*
*Remarque : on a beaucoup plus,* $g$ *n'est monotone sur aucun intervalle non vide et non réduit à un point inclus dans* $[0,1]$ *et n'est continue qu'en* $\frac{1}{2}$.

(4) *Trouver à l'aide de fonctions affines par morceaux un autre exemple de fonction bijective de* $[0,1]$ *sur* $[0,1]$ *et qui ne soit ni monotone, ni continue sur* $[0,1]$.

**Exercice 52** (TVI, continuité, injectivité et monotonie*)**.** *Le but de cet exercice est de démontrer qu'une fonction* $f$ *continue et injective sur un intervalle* $I$ *est nécéssairement strictement monotone sur cet intervalle. On suppose donc* $f$ *continue et injective sur* $I$.

(1) *Soient* $a < b$ *deux éléments de* $I$*, justifier que l'on a* $f(a) < f(b)$ *ou* $f(a) > f(b)$.

(2) *On suppose que* $f(a) < f(b)$ *et on va montrer que* $f$ *est strictement croissante sur* $[a,b]$.
   (a) *Soit* $x \in ]a,b[$ *et supposons que* $f(x) \leq f(a)$*. Montrer, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur* $[x,b]$ *qu'il existe* $d \in [x,b]$ *tel que* $f(d) = f(a)$ *puis en déduire une contradiction.*
   (b) *Soit* $x \in ]a,b[$*, montrer de même que l'on ne peut pas avoir* $f(x) \geq f(b)$.
   (c) *Soient* $x$ *et* $x'$ *tels que* $a < x < x' < b$*, on sait déjà que* $f(x)$ *et* $f(x')$ *appartiennent à* $]f(a), f(b)[$*. Montrer que l'on ne peut pas avoir* $f(x') \leq f(x)$.

(3) *Conclure sur la monotonie de* $f$ *sur tout intervalle* $[a,b]$ *inclus dans l'intervalle* $I$*. Pour quel type d'intervalle* $I$ *le travail est-il terminé ?*

(4) $I$ *est un intervalle quelconque.*
   (a) *Montrer que l'on ne peut pas avoir deux intervalles* $[a,b]$ *et* $[c,d]$ *inclus dans* $I$ *tels que* $f$ *soit strictement croissante sur l'un et strictement décroissante sur l'autre.*
   (b) *Traduire avec des quantificateurs la proposition "*$f$ *est strictement croissante sur* $I$ *ou* $f$ *est strictement décroissante sur* $I$*" puis en donner la négation.*
   (c) *Conclure sur la stricte monotonie de* $f$ *sur* $I$.

(5) *Donner un exemple de fonction continue, injective et non strictement monotone sur une union de deux intervalles.*

**Exercice 53** (continuité, injectivité et monotonie)**.**

(1) *Quel est le domaine de définition maximal de la fonction*
$$x \mapsto (\ln(x+1))^2 \ ?$$

(2) *La fonction* $f$ *est-elle monotone sur ce domaine de définition maximal ?*

(3) *Montrer que le domaine de définition maximal de* $f$ *contient* $[0,+\infty[$ *et déterminer* $f([0,+\infty[)$*. On note* $h := f_{|[0,+\infty[}$ *la restriction de* $f$ *à* $[0,+\infty[$*.* $h$ *réalise-t-elle une bijection entre* $[0,+\infty[$ *et* $f([0,+\infty[)$ *? Si oui, déterminer l'application réciproque* $h^{-1}$.

(4) *Montrer que le domaine de définition maximal de* $f$ *contient aussi* $]-1,0]$ *et déterminer* $f(]-1,0])$*. On note* $g := f_{|]-1,0]}$ *la restriction de* $f$ *à* $]-1,0]$*.* $g$ *réalise-t-elle une bijection entre* $]-1,0]$ *et* $f(]-1,0])$ *? Si oui, déterminer l'application réciproque* $g^{-1}$.

**Exercice 54** (continuité, injectivité, fonction réciproque)**.**

*(1) Existe-t-il une bijection continue entre* $[0,1[$ *et* $\mathbb{R}$ *? Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 52.*

*(2) Soit la fonction* $f\ :[-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall\, x\geq -1,\ \ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

*Déterminer* $f([-1,+\infty[)$*. Montre que* $f$ *réalise une bijection entre* $[-1,+\infty[$ *et* $f([-1,+\infty[)$ *et expliciter ensuite la fonction réciproque* $f^{-1}\ :\ f([-1,+\infty[)\to[-1,+\infty[$*.*

*(3) Trouver le plus grand intervalle ouvert* $I$ *de* $\mathbb{R}$ *contenant* $0$ *sur lequel la fonction*

$$g_I\ :x\in I\mapsto\tan(x^3)$$

*soit injective et réalise donc une bijection entre* $I$ *et* $g(I)$*. Donner alors le domaine de définition de la fonction réciproque* $g_I^{-1}$ *et l'ensemble d'arrivée.*

**Exercice 55** (monotonie, stricte monotonie)**.** *Montrer que*

$$\forall\, t\in]-1,+\infty[\setminus\{0\},\ \ \frac{t}{1+t}<\ln(1+t)<t.$$

*En déduire que les fonctions*

$$x\in]-\infty,-1[\mapsto f(x)=\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x},\quad x\in]0,+\infty[\mapsto g(x)=\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x+1}$$

*sont strictement monotones sur leurs domaines de définition respectifs.*

**Exercice 56.** *Soit* $f$ *une fonction définie sur un intervalle ouvert* $I$ *et* $x_0\in I$*. Montrer que si* $f$ *est dérivable en* $x_0$ *alors* $f$ *est continue en* $x_0$*.*

**Exercice 57** (dérivabilité en un point d'une fonction réelle)**.** *Prolonger par continuité en* $0$*, puis étudier la dérivabilité en ce même point, des fonctions suivantes :*

$$f_1\ :x\in\mathbb{R}^*\mapsto x^2\,\cos(1/x),\quad f_2\ :x\in\mathbb{R}^*\mapsto\sin(x)\,\sin(1/x).$$

**Exercice 58** (nombre dérivé, fonction dérivée)**.** *Soit* $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$f(x)=\begin{cases}x^2\,\sin(1/x) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

*(1) Montrer que* $f$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*.*

*(2) Montrer que* $f$ *est dérivable en* $0$*.*

*(3) La fonction* $f'$ *est-elle continue en* $0$ *?*

**Exercice 59** (dérivabilité des fonctions réelles)**.** *Étudier la dérivabilité sur* $\mathbb{R}$ *des fonctions suivantes :*

*(1)* $f(x)=|x|$*,*

*(2)* $g(x)=x|x|$*,*

*(3)* $h(x)=|x(x-2)|$*.*

**Exercice 60** (Dérivée symétrique)**.**

(1) *Montrer que si $f$ est dérivable en $a \in I$, avec $I$ intervalle ouvert, alors on a* $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$.

(2) *Graphiquement : représenter une droite qui a pour pente* $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ *et traduire le résultat précédent.*

(3) *Le fait que* $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ *existe est-il équivalent à $f$ dérivable en $a$ ?*

**Exercice 61** (règles de calcul pour les fonctions dérivées)**.** *Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur les intervalles ouverts dans lequels elles sont définies (après avoir précisé ces intervalles) :*

(1) $f(x) = \ln|\tan(x/2)|$ ;

(2) $h(x) = \frac{1}{(x^2)^{1/3}} - \frac{1}{(x^3)^{1/2}}$ ;

(3) $i(x) = x^x$.

**Exercice 62** (règles pour le calcul pour les fonctions dérivées)**.** *Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes (chacune à l'intérieur de son domaine de définition) :*

$$f_1(x) = \sqrt{1 + x^2(\sin(x))^2} \qquad f_2(x) = \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$$

$$f_3(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) \qquad f_4(x) = \big(x(x-2)\big)^{1/3}.$$

**Exercice 63** (nombre dérivé, fonction dérivée)**.** *Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs tels que $a+b=1$. Le but de cet exercice est de démontrer que :*

$$a\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b\ln\left(\frac{1}{b}\right) \leq \ln(2). \tag{1}$$

*Pour cela, on considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\begin{aligned} &f(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x) \quad \text{si} \;\; 0 < x < 1 \\ &f(0) = f(1) = 0 \end{aligned}$$

(1) *Montrer que $f$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$.*

(2) *Montrer que*

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = f(1-x)$$

*Quelle propriété du graphe de $f$ peut-on en déduire ?*

(3) *Calculer la dérivée de $f$ sur $]0,1[$ et préciser son signe.*

(4) *Exploiter les résultats précédents pour démontrer l'inégalité* (1).

**Exercice 64** (dérivabilité et uniforme continuité)**.** *Montrer qu'une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, et telle que la fonction dérivée $f'$ soit bornée sur cet intervalle $I$, est uniformément continue sur $I$.*

**Exercice 65** (fonction dérivée et Théorème de Darboux)**.**

(1) *Donner un exemple de fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'est pas continue (penser à l'exercice 58).*

(2) *Soit $f$ une fonction réelle dérivable dans un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$. On va montrer que $f'$ vérifie sur $I$ le théorème des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue (théorème de Darboux).*

   (a) *Soient $a < b$ deux éléments de $I$ et on suppose que $f'(a) < f'(b)$. Soit $m \in ]f'(a), f'(b)[$ et on considère la fonction $g$ définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - mx$. Montrer que $g'(a) < 0$ et $g'(b) > 0$.*

   (b) *Montrer que $\inf_{[a,b]} g$ est atteint en un point de l'ouvert $]a, b[$.*

   (c) *En déduire que $m = f'(c)$.*

   (d) *Comment traiter le cas $f'(a) \geq f'(b)$ ?*

**Exercice 66** (dérivabilité et taux d'accroissement*)**.**

(1) *On considère une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ ouvert et $a \in I$. On suppose que $f$ est dérivable en $a$ (et uniquement en $a$). On considère deux suites de $I$, $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergeant vers $a$ et telles que de plus pour tout entier $n$, $a_n \leq a \leq b_n$ et $a_n \neq b_n$. Montrer que*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(a).$$

*Indication : on pourra utiliser que $f$ dérivable en $a$ équivaut à l'existence d'une fonction $\varepsilon$ définie sur $I$ et telle que*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

(2) *Soit la fonction $h$ définie par*

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

*On a vu dans l'exercice 58 que la fonction $h$ est dérivable en 0 et que $h'(0) = 0$.*
*En prenant $a = 0$ et les suites $(a_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n\pi}\right)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{2}{(2n+1)\pi}\right)_{n \geq 1}$, montrer que le résultat de la question (1) n'est plus vrai si on n'a pas $a_n \leq a \leq b_n$.*

**Exercice 67** (théorème de Rolle*)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, admettant deux limites égales (finies ou infinies, mais égales) en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que la fonction $f'$ s'annule sur $\mathbb{R}$ en au moins un point.*
*Indication : commencer par montrer qu'une fonction qui vérifie les hypothèses ci-dessus est minorée ou majorée.*

**Exercice 68** (théorème de Rolle et accroissements finis)**.**

(1) *Donner une version explicite du théorème de Rolle sur les segments $[1, 2]$ puis $[2, 3]$ pour la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.*

(2) *Donner une version explicite du théorème des accroissements finis pour la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ sur le segment $[-1, 2]$.*

**Exercice 69** (théorème de Rolle)**.**

(1) *Montrer que si une fonction réelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ s'annule en $k \geq 2$ nombres réels distincts, alors sa fonction dérivée s'annule en au moins $k - 1$ nombres réels distincts.*

(2) *En déduire que si $P$ est une fonction polynomiale d'une variable à coefficients réels, de degré $n$ supérieur ou égal à 2, et ayant $n$ racines réelles distinctes, alors la fonction polynomiale dérivée $P'$ a $n-1$ racines réelles distinctes. (On admet qu'une fonction polynomiale de degré $k$ a au plus $k$ racines réelles, ce résultat sera vu en algèbre.)*

**Exercice 70** (théorème de Rolle)**.** *Soient $n \geq 2$ un entier et $a, b$ deux nombres réels. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes. On pourra utiliser le (1) de l'exercice 69.*

**Exercice 71** (accroissements finis)**.** *Soient $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$. On note $M = \sup_I f'$. Montrer que si $f(b) - f(a) = M(b-a)$ alors $f$ est une fonction affine sur $I$ (on pourra utiliser la fonction $h$ définie sur $I$ par $h(x) = M(x-a) - (f(x) - f(a))$).*

**Exercice 72** (accroissements finis)**.** *Soient une fonction $f$ continue sur un intervalle ouvert $I$ et $x_0 \in I$. On suppose que $f$ est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que $f'$ admet des limites à gauche et à droite en $x_0$ qui sont égales et valent $\ell$. En revenant à la défintion de la dérivabilité, montrer que $f$ est dérivable en $x_0$ et que $f'(x_0) = \ell$.*

**Exercice 73** (accroissements finis)**.** *Soit $f$ la fonction de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} \text{ si } x \in [0,1] \\ 1/x \text{ si } x \in ]1,2]. \end{cases}$$

*Montrer que $f$ est dérivable sur $]0, 2[$, à droite en 0 et à gauche en 2, et donner sur le segment $[0, 2]$ une version explicite du théorème des accroissements finis.*

**Exercice 74** (accroissements finis*)**.** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur $]0, 1]$. On suppose qu'il existe un réel strictement positif $a$ tel que, pour tout $x \in ]0, 1]$, $|f'(x)| < a$.*

(1) *Montrer, en utilisant le critère de Cauchy, que la suite $(f(1/n))_{n \geq 1}$ converge vers une limite finie. On note $\ell$ cette limite.*

(2) *Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $]0, 1]$ qui converge vers 0, montrer que la suite $(f(x_n))_n$ converge aussi vers $\ell$ (on pourra commencer par montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|f(x_n) - f(1/n)| < \varepsilon$).*

(3) *En déduire que l'on peut prolonger par continuité la fonction $f$ en 0. Quel est le prolongement ?*

**Exercice 75** (accroissements finis)**.** *Soit $I = ]a, b[$ un intervalle ouvert borné non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I$.*

(1) *On suppose de plus que $f$ est non bornée sur $I$. Montrer qu'alors $f'$ est non bornée sur $I$. Indication : on pourra montrer la contraposée.*

(2) *La réciproque est fausse. Trouver une fonction bornée sur un intervalle $]a, b[$, dérivable sur cet intervalle et dont la dérivée n'est pas bornée (on pourra par exemple chercher parmi des fonctions continues sur $[a, b]$...).*

**Exercice 76** (accroissements finis)**.**

(1) *En étudiant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, estimer inférieurement et supérieurement la différence $\sqrt{100.1} - 10$.*

*(2) En étudiant la fonction* $x \mapsto \exp(-x)$*, estimer inférieurement et supérieurement la différence* $1 - \exp(-0.024)$.

**Exercice 77** (accroissements finis)**.** *Appliquer soit la formule ou l'inégalité des accroissements finis, soit l'une de ses variantes, pour démontrer les quatre inégalités suivantes :*

*(1)* $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ *pour* $x$ *et* $y$ *réels quelconques ;*

*(2)* $\ln(1 + x) \leq x$ *pour tout* $x \geq 0$ *;*

*(3)* $e^x \geq 1 + x$ *pour tout* $x$ *réel ;*

*(4)* $x/(1 + x^2) \leq \arctan(x) \leq x$ *pour tout* $x \geq 0$.

**Exercice 78** (accroissements finis)**.** *Soient* $x$ *et* $y$ *deux nombres réels tels que* $0 < x < y$. *Montrer que l'on a*

$$x < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < y.$$

**Exercice 79** (accroissements finis)**.** *Soit* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur* $[-1, 1]$*, telle que* $f(-1) = f(1) = 0$. *On note* $f'(-1)$ *et* $f'(1)$ *respectivement les dérivées à droite en* $-1$ *et à gauche en* $1$. *On pose*

$$\forall\, x \in ]-1, 1[,\ g(x) = \frac{f(x)}{1 - x^2}.$$

*(1) Montrer que la fonction* $g$ *est prolongeable par continuité sur* $[-1, 1]$. *On note* $\tilde{g} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *le prolongement continu de* $g$ *à* $[-1, 1)$. *Expliciter* $\tilde{g}(1)$ *et* $\tilde{g}(-1)$ *en fonction des données de l'énoncé.*

*(2) Montrer qu'il existe au moins un point* $c \in ]-1, 1[$ *tel que*

$$g'(c) = -\frac{1}{4}\big(f'(1) + f'(-1)\big).$$

*(3) La fonction*

$$F : x \in ]-1, 1[ \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$$

*est-elle bornée sur* $]-1, 1[$ *?*

*(4) Même question pour* $f$.

*(5) Même question pour* $g$.

**Exercice 80** (accroissements finis)**.**

*(1) Soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$. *En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction* $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1/x^a$*, montrer que pour* $k \in \mathbb{N}$*,* $k \geq 2$*, on a l'inégalité*

$$\frac{1}{k^{a+1}} < \frac{1}{a}\Big(\frac{1}{(k-1)^a} - \frac{1}{k^a}\Big).$$

*(2) On considère la suite* $(u_n)_{n \geq 2}$ *de terme général*

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{a+1}},\ n \geq 2.$$

*Montrer que la suite* $(u_n)_{n \geq 2}$ *converge vers une limite finie.*

*(3) En appliquant maintenant le théorème des accroissements finis à la fonction* $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$*, montrer que pour tout* $k$ *dans* $\mathbb{N}^*$*, on a l'inégalité* $\ln(k + 1) - \ln(k) < 1/k$.

(4) *Soit* $(v_n)_{n\geq 0}$ *la suite de terme général*

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k,\ \ n \geq 1.$$

*Montrer que* $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

**Exercice 81** (théorème des valeurs intermédiaires (TVI), inégalité des accroissements finis)**.**

(1) *Démontrer que la fonction* $\cos$ *admet au moins un point fixe sur l'intervalle* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *et que l'on peut même se restreindre à l'intervalle* $[0,1]$.

(2) *Montrer que*

$$\forall (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \quad |\cos(x) - \cos(y)| \leq \sin(1)|x-y|.$$

(3) *En reprenant l'exercice 29, montrer que la suite* $(x_n)$ *définie par*

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} = \cos(x_n) \end{cases}$$

*converge vers* $\ell \in [0,1]$ *point fixe de* $\cos$ *et que ce point fixe est unique.*

**Exercice 82** (règle de l'Hospital)**.** *Soient* $I$ *un intervalle et* $x_0 \in I$, $f,g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues sur* $I$ *et dérivables sur* $I\setminus\{x_0\}$. *On suppose que*

— $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
— $\forall x \in I\setminus\{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.
— $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$

*Le but de cet exercice est de montrer qu'alors* $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

(1) *Montrer que pour tout* $x \in I\setminus\{x_0\}$ *on a* $g(x)\neq 0$.

(2) *Fixons* $a \in I\setminus\{x_0\}$ *avec par exemple* $a < x_0$. *En considérant la fonction* $h : I \to \mathbb{R}$ *définie par* $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$, *montrer qu'il existe* $c_a \in ]a, x_0[$ *tel que* $h'(c_a) = 0$.

(3) *En déduire que* $\displaystyle\lim_{a\to x_0^-}\frac{f(a)}{g(a)} = \ell$ *puis le résultat annoncé.*

*Avec la règle de l'Hospital calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}, \quad \lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{x-1}\Big).$$

**Exercice 83** (théorème de Rolle)**.** *Soit* $f$ *une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur* $[0,1]$. *On suppose que* $f(x)\neq 0$ *pour tout* $x\in ]0,1[$ *et que* $f(0) = f(1) = 0$.

(1) *Montrer que* $f$ *reste de signe constant sur* $]0,1[$.

(2) *On suppose par exemple que pour tout* $x \in ]0,1[$, $f(x) > 0$. *Quel est le signe de* $\frac{f(x)}{x}$ *et le signe de* $\frac{f(x)}{x-1}$ *pour* $x \in ]0,1[$ *?*

(3) *En déduire que* $f'(0)f'(1) \leq 0$.

**Exercice 84** (formules de Taylor-Lagrange)**.**

(1) *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x - x^3/6 \leq \sin(x) \leq x - x^3/6 + x^5/120$.

*(2) Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x$.

*(3) Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^x$.

*Remarque : les formules de Taylor-Lagrange utilisées pour montrer les inégalités ne sont pas toutes au même ordre.*

**Exercice 85** (formules de Taylor)**.**

*(1) Soit* $n$ *un entier strictement positif. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral au voisinage de* $0$ *à l'ordre* $2n$ *pour la fonction* $\cos(x)$.

*(2) En déduire que la suite de terme général* $u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k/(2k)!$ *a une limite quand* $n$ *tend vers l'infini, et calculer cette limite.*

**Exercice 86** (développements limités (DL))**.** *Calculer les développements limités en 0 à l'ordre* $n$ *des fonctions définies comme suit au voisinage de* $0$ *:*

*(1)* $f(x) = \cos(x^2) + \sin(x)$ *avec* $n = 6$.

*(2)* $f(x) = \cos(2x)\sqrt{1+x}$ *avec* $n = 3$.

*(3)* $f(x) = (1+x+x^2)/(1-x-x^2)$, *avec* $n = 3$.

*(4)* $f(x) = (\cos(x^3))^{\frac{1}{3}}$, *avec* $n = 12$.

*(5)* $f(x) = (1+x)^{100}/\big((1-2x)^{40}(1+2x)^{60}\big)$, *avec* $n = 2$.

*(6)* $f(x) = \ln(1 + x\sin(x))$, *avec* $n = 4$.

*(7)* $f(x) = e^{\cos(x)}$, *avec* $n = 4$.

*(8)* $f(x) = (1+\sin(x))^{1/3}$, *avec* $n = 4$.

*(9)* $f(x) = x/(e^x - 1)$, *avec* $n = 2$.

*(10)* $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, *avec* $n = 2$ *(on aura posé* $f(0) = e$*).*

**Exercice 87** (développements limités (DL))**.** *Soit la fonction polynomiale* $f\ : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + 3x + 1$. *Donner le développement limité de* $f$ *à l'ordre 4 au point 0 ainsi qu'au point 2.*

**Exercice 88** (développements limités (DL) en un point autre que 0)**.** *Calculer les développements limités en* $a$ *à l'ordre* $n$ *des fonctions définies comme suit au voisinage de* $a$ *:*

*(1)* $f(x) = \sqrt{x}$ *avec* $a = 2$ *et* $n = 3$.

*(2)* $f(x) = e^x$ *avec* $a = -1$ *et* $n = 5$.

*(3)* $f(x) = \sin(x)$ *avec* $a = \frac{\pi}{4}$ *et* $n = 2$.

*(4)* $f(x) = \ln(\sin(x))$ *avec* $a = \frac{\pi}{4}$ *et* $n = 2$.

**Exercice 89** (développements limités (DL))**.** *Montrer que la partie principale d'un développement limité en* $0$ *d'une fonction paire ne contient que des termes de degré pair.*

**Exercice 90** (développements limités (DL))**.** *Trouver les réels* $a$ *et* $b$ *tels que les DL en 0 de* $\cos x$ *et de* $\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ *soient égaux jusqu'au plus grand ordre possible.*

**Exercice 91** (développements limités (DL), tangente géométrique à un graphe)**.** *Soit la fonction* $f\ : x \mapsto \ln(x^2+2x+2)$.

*(1) Calculer le développement limité de* $f$ *à l'ordre 3 en 0.*

(2) *Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point* $(0, \ln(2))$. *Donner la position de la courbe par rapport à cette tangente et représenter sommairement le graphe de $f$ au voisinage du point* $(0, \ln(2))$.

**Exercice 92** (développements limités (DL), tangente géométrique à un graphe, extrait du DM 2, 2011-2012)**.**

(1) *Étudier la parité de la fonction* $x \mapsto \tan(x)$ *sur* $]-\pi/2, \pi/2[$. *Que peut-on dire du DL de* $x \mapsto \tan(x)$ *en* $0$ *(voir l'exercice 89 ci-dessus) ?*

(2) *Calculer le DL de* $x \mapsto \tan(x)$ *en* $0$ *à l'ordre* $5$.

(3) *On pose*

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}$$

*pour* $x \in ]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[$. *Montrer que $f$ admet une limite en* $0$ *que l'on calculera.*

(4) *D'après la question précédente, $f$ est prolongeable par continuité en* $0$. *Montrer que la courbe représentative de $f$ admet une tangente au point d'abscisse* $0$, *et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.*

**Exercice 93** (intégration de développements limités)**.** *Montrer que :*

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\, dt = \ln(3), \quad \lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} = \ln(2).$$

**Exercice 94** (calculs de limites *via* les DL)**.** *Calculer les 2 limites de l'exercice 82 en utilisant les développements limités.*

**Exercice 95** (développements limités (DL), tangente géométrique à un graphe, fonction réciproque)**.** *On considère la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ définie par :* $f(x) = (e^x - 1)/x$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 1$.

(1) *Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x$.*

(2) *Montrer que $f$ est en fait deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner* $f''(0)$.

(3) *Écrire la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour $f$. Préciser la position de la courbe représentative de $f$ par rapport à sa tangente en 0.*

(4) *Déterminer les variations de la fonction* $\phi : x \mapsto x\, e^x - e^x + 1$. *En déduire que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

(5) *Déterminer l'intervalle image $J$ de la fonction $f$, et montrer que la fonction réciproque* $g : J \to \mathbb{R}$ *de $f$ est deux fois dérivable sur $J$.*

**Exercice 96** (calculs de limites *via* les DL)**.** *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0} \Big(\Big(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x)\Big)\frac{1}{x^2}\Big)$$

$$\lim_{x\to 0} \Big(\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\ln(1+x^2)}\Big)$$

$$\lim_{x\to 0} \Big(\frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}\Big)$$

$$\lim_{x\to 0} \Big(\big(\frac{e^{ax} + e^{bx}}{2}\big)^{1/x}\Big), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 97** (calculs de limites *via* les développements asymptotiques)**.** *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x} - \cos(\frac{1}{x})}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(x - x^2 \ln(1 + 1/x)\big) \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \left(e^{1/x} - e^{1/(x+1)}\right)$$

**Exercice 98** (asymptotes à un graphe et position)**.** *Donner le domaine de définition puis rechercher les asymptotes au graphe de la fonction et préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote pour :*

*(1)* $f\ : x \mapsto \frac{x}{1+e^{1/x}}$.

*(2)* $g\ : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$.

*(3)* $h\ : x \mapsto [(x^2 - 2)(x + 3)]^{1/3}$.

## 3. Exercices chapitre 3

**Exercice 99** (sommes de Riemann)**.**

*(1)* *Soit $x > 0$. Calculer $\sum_{p=0}^{p=n-1} e^{px/n}$ en fonction de $x$.*

*(2)* *Montrer que la limite suivante existe :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{px/n}\right).$$

*(3)* *En déduire que*

$$\forall\, x > 0, \quad \int_0^x e^t\, dt = e^x - 1.$$

**Exercice 100** (sommes de Riemann)**.** *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \ ; \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} \ ; \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin(\frac{k\pi}{n}) \ ;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \ ; \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \ ; \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} e^{\frac{k+2n}{n}}.$$

**Exercice 101** (sommes de Riemann)**.** *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n}\right)$.

*Pour tout entier $n > 0$, on note $A_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!\, n^n}}$, exprimer $\ln(A_n)$ comme une somme puis en déduire que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{4}{e}$.*

**Exercice 102** (monotonie de la prise d'intégrale de Riemann)**.** *Soit $f$ une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$.*

*(1)* *Montrer que s'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$ alors $\int_a^b f(x)\, dx > 0$.*

*(2)* *Que peut-on dire sur $f$ si $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ ?*

*(3)* *Le résultat précédent reste t-il vrai si on enlève l'hypothèse de continuité ou l'hypothèse de positivité ?*

**Exercice 103** (monotonie de la prise d'intégrale de Riemann)**.** *On pose :*

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx, \quad J = \int_0^2 e^{-x^2}\, dx, \quad K = \int_0^1 e^{-x^2} \sin(x)\, dx.$$

*Montrer que :*

*(1)* $0 \le I \le 1$ *;*

*(2)* $I \le J$ *;*

*(3)* $K \le \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

*Indication : pour le (3) on pourra commencer par montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \le \sin(x) \le x$.*

**Exercice 104** (monotonie de la prise d'intégrale de Riemann)**.** *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \big(\tan(x)\big)^n\, dx.$$

(1) *Étudier le sens de variation de la suite* $(I_n)_{n\geq 1}$.

(2) *Montrer que la suite* $(I_n)_{n\geq 1}$ *est minorée. Que peut-on en déduire ?*

**Exercice 105** (monotonie de la prise d'intégrale de Riemann)**.** *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

(1) *Déterminer le sens de variation de la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$.

(2) *Montrer que*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

(3) *Montrer*

$$\forall\, n \geq 2,\ \int_1^n \frac{dx}{x^2} \leq u_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2}.$$

(4) *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge, lorsque* $n$ *tend vers l'infini, vers un nombre* $L$ *appartenant au segment* $[1, 2]$.

**Exercice 106** (théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soient une fonction* $f$ *continue sur un intervalle* $I$ *et* $a \in I$. *On définit* $F$ *sur* $I$ *par* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. *Le but de l'exercice est de montrer que* $F$ *est une primitive de* $f$ *sur* $I$.

(1) *Soit* $x_0 \in I$, *vérifier que*

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,dt.$$

(2) *En utilisant la continuité de* $f$ *en* $x_0$, *montrer que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon.\right.$$

(3) *Conclure.*

**Exercice 107** (sommes de Riemann, théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit* $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. *On pose* $x_k = a + k(\frac{b-a}{n})$ *pour* $k = 0, \ldots, n$. *Déterminer*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) f'(x_k).$$

**Exercice 108** (théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit* $f$ *une fonction continue de* $[-1, 1]$ *dans* $\mathbb{R}$. *Démontrer que la fonction* $F$ *définie par* $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} f(t)\,dt$ *est dérivable sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *(ainsi qu'à droite en* $-\frac{\pi}{2}$ *et à gauche en* $\frac{\pi}{2}$*) et calculer sa dérivée.*

**Exercice 109** (théorème fondamental de l'analyse)**.** *Pour tout* $x > 0$ *on pose :*

$$F(x) := \int_1^x \frac{\ln t}{1 + t^2}\,dt\,.$$

(1) *Quel est le signe de* $F$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *?*

(2) *Etudier la continuité et la dérivabilité de* $F$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Calculer* $F'(x)$.

*(3) Donner le DL de $F$ au voisinage de $x = 1$ à l'ordre* 3.

**Exercice 110** (changement de variables dans les intégrales)**.**
*Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique, de période $T > 0$. Montrer que la quantité $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx$ ne dépend pas de $\alpha$.*

**Exercice 111** (intégration par parties, changement de variables dans les primitives*)**.** *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x$ positif, on pose :*

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^n}.$$

*(1) En faisant une intégration par parties sur $I_n(x)$, déterminer une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.*

*(2) Montrer que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_n(x) = \int_0^{\arctan(x)} \big(\cos(t)\big)^{2(n-1)}\,dt.$$

**Exercice 112** (intégration par parties, changement de variables dans les calculs de primitives)**.**

*(1) Calculer*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos(x)}.$$

*Indication : on rappelle que* $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$*...*

*(2) Soit $f$ une fonction continue sur un segment $[a,b]$ (avec $a < b$) telle que*

$$\forall\, x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x).$$

*Exprimer $\int_a^b x\,f(x)\,dx$ en fonction de $\int_a^b f(x)\,dx$.*

*(3) En déduire la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\sin(x)}.$$

**Exercice 113** (changement de variables dans les calculs de primitives)**.** *Calculer les intégrales suivantes (on pourra effectuer des changements de variables).*

$$D_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx\ ; \qquad D_2 = \int_0^1 e^x\cos(e^x)\,dx\ ; \qquad D_3 = \int_e^3 \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx\ ;$$

$$D_4 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x+1)}\,dx\ ; \qquad D_5 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\ ; \qquad D_6 = \int_{1/2}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$$

*(poser $t = \ln x$ dans $D_1$, $D_3$ et $D_4$ ; poser $x = \sin u$ dans $D_5$ ; poser $y = 1/x$ dans $D_6$).*

**Exercice 114** (changement de variables dans les calculs de primitives)**.** *Calculer les intégrales suivantes.*

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,dx\ ; \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\cos^3 x\,dx\ ; \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^2 x\,dx.$$

*Pour le calcul de $I_1$, on posera $t = \sin x$. Deviner la suite. Que peut-on dire en général ?*

**Exercice 115** (intégration par parties, changement de variables dans les calculs de primitives). *Calculer les intégrales suivantes :*

$$K_1 = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx\ ; \qquad K_2 = \int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx\ ; \qquad K_3 = \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx\ ;$$
$$K_4 = \int_{-1}^1 (\arccos x)^2\,dx\ ; \quad K_5 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx\ ; \qquad K_6 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$

*Indications : pour $K_2$ on pourra commencer par montrer que pour tout $x > 0$ $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ puis faire le changement de variable $t = 1/x$, pour $K_4$ commencer par faire le changement de variable $x = \cos t$, pour $K_5$ intégrer par parties $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.*

**Exercice 116** (intégration par parties). *Calculer les intégrales suivantes (on pourra intégrer par parties).*

$$C_1 = \int_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx\ ; \qquad C_2 = \int_0^1 \arctan x\,dx\ ;$$
$$C_3 = \int_0^1 (x^2+1)\cos x\,dx\ ; \qquad C_4 = \int_1^2 (3x^2+x+1)\ln x\,dx.$$

**Exercice 117** (intégration par parties, continuité uniforme*).

*(1) Pour $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, démontrer que $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.*

*(2) Démontrer le même résultat pour une fonction $f$ en escalier sur $[a,b]$.*

*(3) Démontrer le même résultat pour une fonction $f$ continue sur $[a,b]$.*

**Exercice 118** (intégration de polynômes trigonométriques par linéarisation).

*Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que pour exprimer $\cos^n(x)$ (resp. $\sin^n(x)$) en fonction de $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$ avec $1 \le k \le n$, on utilise les formules d'Euler puis on développe à l'aide de la formule du binôme (voir le cours de BMS, chapitre 4) et on regroupe les termes $e^{ikx}$ et $e^{-ikx}$ pour faire apparaitre $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$.*

*Calculer par linéarisation la valeur des intégrales*

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx \quad \textit{et} \quad J_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^4 x\,dx.$$

**Exercice 119** (changement de variables dans les intégrales, intégrales de fractions rationnelles). *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad J = \int_{1/2}^3 \frac{dx}{x^2-x+1}$$
$$K = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}\,dx, \qquad L = \int_0^{-1} \frac{dx}{e^x+2e^{-x}}\,dx,$$
$$M = \int_2^4 \frac{x}{x^2-4x-5}\,dx, \qquad N = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x + \tan^3 x}{(\tan x+2)^2}\,dx,$$

**Exercice 120** (première formule de la moyenne). *Soit $f$ une fonction continue sur le segment $I = [a,b]$ avec $a < b$. On considère une fonction $g$ positive et Riemann-intégrable sur $I$, telle* *que* $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. *Montrer qu'il existe* $c \in I$ *tel que*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

*Indication : commencer par justifier qu'il existe* $m$ *et* $M$ *tels que* $f([a,b]) = [m,M]$ *puis encadrer* $fg$ *sur* $[a,b]$.

**Exercice 121** (formule de Wallis*)**.** *Pour tout entier* $n$*, on pose* $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx$.

(1) *Calculer* $I_0$ *et* $I_1$.

(2) *En intégrant par parties, établir une formule de récurrence entre* $I_{n+2}$ *et* $I_n$.

(3) *Exprimer* $I_{2n}$ *en fonction de* $I_0$ *et* $I_{2n+1}$ *en fonction de* $I_1$.

(4) *Montrer que pour tout entier* $n$, $I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{n+1}{n} I_{n+1}$. *En déduire que la suite* $(\frac{I_n}{I_{n+1}})_n$ *converge et déterminer sa limite.*

(5) *En utilisant les deux questions précédentes, donner une expression de* $\pi$ *comme une limite de quotients de produits d'entiers.*

(6) *Montrer que* $\sqrt{\pi} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}$.

(7) *Quelles est la probabilité d'obtenir autant de pile que de face lors de* $2n$ *lancers d'une pièce supposée équilibrée ? En donner une valeur approchée pour* $n = 100$.

## 4. Problème de synthèse*

Le but de ce problème est de montrer l'irrationnalité de $\pi$.
Pour $(a,b,n) \in (\mathbb{N}^*)^3$, on note $P_n$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = \frac{x^n(bx-a)^n}{n!}$$

et $I_n(a,b) = \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\,dt$.

1a) Justifier, en utilisant une formule de Taylor, que pour toute fonction polynomiale $P$ de degré inférieur ou égal à $N$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

1b) En déduire que pour tout entier $k$, $P_n^{(k)}(0)$, les dérivées successives de $P_n$ en 0, sont dans $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

1c) Montrer de même que pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ est dans $\mathbb{Z}$.

2) Montrer qu'il existe un réel strictement positif $M$, tel que $\sup_{[0,\pi]} |x(a-bx)| \leq M$ puis que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{[0,\pi]} |P_n| \leq \frac{M^n}{n!}.$$

3a) On note pour tout entier $n$, $u_n = \frac{M^n}{n!}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang la suite $(u_n)_n$ est décroissante puis qu'elle converge vers 0.

3b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a,b) = 0$.

Nous allons maintenant montrer par l'absurde que $\pi$ est irrationnel.

4) Soient $f$ et $g$ deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi]$, démontrer, pour tout $N$ de $\mathbb{N}^*$, la formule d'intégration par parties généralisée :

$$\int_0^\pi f(t)g^{(N)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \left[ f^{(k-1)}(t) g^{(N-k)}(t) \right]_0^\pi + (-1)^N \int_0^\pi f^{(N)}(t) g(t)\,dt.$$

5a) On suppose que $\pi = \frac{a}{b}$ avec $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $I_n(a,b)$ est dans $\mathbb{Z}$.

5b) Conclure que $\pi$ est irrationnel.