ANNEE UNIVERSITAIRE 2022/2023

CODE UE : 4TMQ308U

**Séries, suites de fonctions et intégrales généralisées**

université de BORDEAUX — Collège Sciences &Technologies


# 1 Intégrales généralisées

**Exercice 1.** (Primitives, équivalence, comparaison) Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{\pi/2} \tan(x)\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \big(\sin(2x) + \frac{1}{x^2}\big)\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx \ (n \geqslant 0)$$

$$\int_1^{+\infty} \arctan(\frac{1}{x})\,dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x\ \ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\int_0^{1} x^{-2}\ln(1-x^2)\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(x)}{\sinh(\pi x)}\,dx$$

**Exercice 2.** Étudier la convergence des intégrales suivantes selon les valeurs des paramètres $\alpha, \beta$ :

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln(x)}\,dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \qquad \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \quad (\alpha > -1)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} \qquad (\alpha, \beta \geqslant 0).$$

**Exercice 3.** Étudier suivant les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ la convergence des intégrales suivantes $(0 < a < 1 < b)$

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \qquad \text{et} \qquad \int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

**Exercice 4.**

1. Déterminer les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha}\,dx$$

est convergente.

2. Soit $a \in \,]0,1[$. Calculer à l'aide d'une intégration par parties puis d'un changement de variable
$$I_a = \int_a^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$$
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

**Exercice 5.** (Abel) Étudier la convergence des intégrales suivantes :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,\sin(x)}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x)\,dx.$$

**Exercice 6.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit, lorsque ceci a un sens :
$$I_\alpha = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \qquad \text{et} \qquad J_\alpha = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$$

1. Montrer que $I_\alpha$ et $J_\alpha$ sont absolument convergentes pour $\alpha > 1$.
2. En déduire que $I_\alpha$ et $J_\alpha$ convergent pour $0 < \alpha \leqslant 1$.
3. Que peut-on dire des intégrales
$$A_\lambda = \int_0^{+\infty} \sin(x^\lambda)\,dx \qquad \text{et} \qquad B_\lambda = \int_0^{+\infty} \cos(x^\lambda)\,dx$$
lorsque $\lambda > 1$.
4. Montrer que $I_\alpha$ et $J_\alpha$ divergent si $\alpha \leq 0$. On pourra envisager les suites
$$u_n = \int_{2\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_{2\pi}^{n\pi} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx.$$

**Exercice 7.** Justifier la convergence et calculer les intégrales suivantes
$$\int_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)}\,dx$$
Indications : chercher une primitive pour la première et effectuer un changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ pour la seconde.

**Exercice 8.** Justifier la convergence et calculer les intégrales suivantes
$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$$
Indications : intégration par parties pour la première et pour la seconde commencer par remarquer que $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,dx$ puis poser $x = 2t$ et utiliser les formules trigonométriques de $\sin(2t)$ et $\cos(\frac{\pi}{2} - t)$.

**Exercice 9.**

1. Soit $f$ une fonction continue, positive et croissante sur $[a, +\infty[$, non identiquement nulle. Montrer que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.
2. Soit $f$ une fonction positive et décroissante définie sur $[0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} x\,f(x) = 0$. En particulier $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Construire une fonction $f$ continue, positive et non bornée sur $[0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Comparer avec la question précédente.

**Exercice 10.** Soient $f, g$ deux fonctions continues définies sur $[0, +\infty[$. Supposons que

$$\int_0^{+\infty} f(x)^2\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} g(x)^2\,dx$$

convergent. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$

converge absolument.
Indication : pour tous réels $A$ et $B$, $(|A| - |B|)^2 \geq 0$.

**Exercice 11.** Soient $a > 0$ et $f$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

1. Pour tout $\lambda \geqslant 0$, établir la convergence de

   $$\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\lambda}\,dx.$$

   Indication : comme pour une transformation d'Abel, écrire $f$ comme la dérivée d'une primitive $F$ et effectuer une intégration par parties.
2. On pose $g(\lambda) = \int_a^{+\infty} e^{-\lambda x} f(x)\,dx$. Montrer que $g$ est bien définie sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty} g(\lambda) = 0$.

## 2 Séries numériques

**Exercice 12.** (Séries téléscopiques) Calculer la somme de chacune des séries de terme général $u_n$ suivantes (pour $n \geqslant 1$ ou $n \geqslant 2$ suivant les cas)

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}}, \qquad u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \qquad u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2}).$$

**Exercice 13.** (Rappels)

1. Quelles sont les limites de $\sqrt[n]{a}$ ($a \geqslant 0$) et $\sqrt[n]{n}$ quand $n \to +\infty$ ?
2. Déterminer la limite $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{b}{n})^n$ pour tout $b \in \mathbb{R}$.

**Exercice 14.** (Séries géométriques et comparaison, critère de d'Alembert ou de Cauchy) Étudier la nature des séries de terme général

$$\frac{1}{n2^n}, \qquad \frac{1}{2^n - n}, \qquad \frac{n^2+1}{2^n}, \qquad \frac{1}{e^{\sqrt{n^2+1}}},$$

$$\frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}, \qquad \frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}, \qquad \frac{1}{e^n \ln(n)}.$$

**Exercice 15.** (Séries de Riemann et comparaison) Étudier la convergence des séries de terme général

$$\frac{\ln(n)}{n}, \qquad \frac{1}{2n-1}, \qquad \frac{1}{(2n-1)2n}, \qquad \frac{\ln(n)}{(n+1)^2}$$

$$\frac{\sqrt{n!}}{(n+2)!}, \qquad \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}, \qquad \frac{-1}{n} \ln\left(\frac{2n-(-1)^n}{2n+1}\right)$$

**Exercice 16.** On veut montrer que la suite

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n, \quad n \geqslant 1$$

admet une limite (appelée la constante $\gamma$ d'Euler). Autrement dit $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ peut être approximé par $\gamma + \ln n$ lorsque $n \to +\infty$. Numériquement $\gamma \approx 0.577215....$

1. Déterminer une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

2. Donner le développement limité d'ordre 2 de $x + \ln(1-x)$ en 0. En déduire que

$$\frac{1}{k} - a_k \sim -\frac{1}{2k^2}$$

quand $k \to +\infty$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ ci-dessus est convergente.

**Exercice 17.**

1. (Cours) Soit $\alpha > 0$. Montrer que pour tous $k \geqslant 1$ on a

$$(k+1)^{-\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} x^{-\alpha}\, dx \leqslant k^{-\alpha}.$$

En déduire que la série de terme général $u_n = n^{-\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. Pour $\alpha > 1$, soit $R_n = \sum_{k \geqslant n+1} u_k$ le reste de cette série. Montrer que

$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

quand $n \to +\infty$.

3. Trouver un équivalent de la suite $(R_n)_n$ pour la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{(n^2-2)^2}$.

4. En reprenant les équivalents de l'exercice 16, question 2, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma \sim \frac{1}{2n}.$$

**Exercice 18.** (Séries faisant intervenir la factorielle de $n$).

1. Comparer $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ avec $\int_1^n \ln(x)\, dx$. En déduire un encadrement de $n!$. [1]

2. Étudier la convergence des séries de terme général

$$\frac{n!}{n^n}, \qquad \frac{1}{\ln(n!)}, \qquad \frac{n!}{e^n}$$

**Exercice 19.** On veut montrer que le nombre $e$ est irrationnel.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n!}$ converge.

2. Donner la formule de Taylor avec reste intégral de la fonction exponentielle. En déduire

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

1. On verra plus tard la formule de Stirling qui donne un équivalent $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$. Ici on demande seulement un encadrement.

3. Soit $q \geqslant 0$. Montrer que $\dfrac{q!}{(q+k)!} \leqslant \dfrac{1}{(q+1)^k}$ pour tout $k \geqslant 1$. En écrivant
$$e = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{k!},$$
montrer par l'absurde que $e$ est irrationnel.

**Exercice 20.**

1. Soit $(u_n)_n$ une suite positive et décroissante. Montrer que les séries
$$\sum_n u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_n 2^n\, u_{2^n}$$
convergent ou divergent simultanément.
2. Retrouver à l'aide du résultat précédent les cas de convergence de la série suivante en fonction des paramètres $\alpha, \beta$ :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

**Exercice 21.** Soit $(u_n)_n$ une suite positive. Montrer les propriétés suivantes.

1. Si $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_n u_n^2$ converge.
2. La série $\sum_n u_n$ est de même nature que $\sum_n \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

**Exercice 22.** Étudier la convergence et la convergence absolue des séries de terme général (pour $n \geqslant 1$) :
$$\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}, \qquad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}-1}, \qquad \sin((n+\frac{\alpha}{n})\pi), \qquad \ln(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha})$$
$$\frac{(-1)^n}{n+2\sin(n)}, \qquad \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}, \qquad \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^{n+1}} \quad (\alpha > 0).$$
Indications : pour le 4ième terme général penser à un DL d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+u)$, pour les trois derniers termes généraux penser à un DL d'ordre 1 en 0 de $\frac{1}{1+u}$.

**Exercice 23.** Étudier la nature des séries de terme général
$$\frac{(-1)^n n+1}{n^2}, \qquad \cos(\frac{1}{n})-1, \qquad \frac{1+i\,n}{n(n+1)}$$
$$(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+5}, \qquad (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n, \qquad \frac{n^{1/3}}{(3n)!}.$$

**Exercice 24.** Soit $\alpha$ un réel strictement positif.

1. Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in [0,1]) \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{\alpha k} = \frac{1}{1+x^\alpha} + (-1)^n \frac{x^{\alpha(n+1)}}{1+x^\alpha}.$$

2. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\alpha k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{\alpha(n+1)}}{1+x^\alpha}\,dx.$$

3. Retrouver que $\sum_k \frac{(-1)^k}{\alpha k+1}$ converge et montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx$.
4. Faire le calcul pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

**Exercice 25.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Supposons que $\theta$ n'est pas un multiple entier de $\pi$.

1. Montrer par l'absurde que la suite $(\sin(n\theta))_n$ diverge (développer $\sin((n+1)\theta)$ et $\sin((n-1)\theta)$).
2. Calculer $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} e^{ik\theta}$.
3. En déduire que les sommes $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin(k\theta)$ sont bornées par une quantité indépendante de $n$.
4. Étudier les propriétés similaires avec $\cos(n\theta)$.
5. Si $\theta$ est un multiple rationnel de $2\pi$, montrer que l'ensemble des $\sin(n\theta)$, quand $n$ parcourt les entiers naturels, est un ensemble fini. [2]

**Exercice 26.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$.
2. Que dire de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin^2(n\theta)}{n}$ ?

**Exercice 27.** Étudier la nature des séries de terme général

$$(-1)^n \frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}}, \qquad \frac{\cos(3n)}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad \frac{e^{in\alpha}}{n+\cos(n)}, \qquad \frac{(-1)^n}{n-\ln(n)},$$

**Exercice 28.** Soient

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad b_n = \frac{n}{2^n}, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

pour $n \geqslant 1$.

2. En revanche, si $\theta$ n'est pas un multiple rationnel de $2\pi$, on peut montrer que l'ensemble des $\sin(n\theta)$ est dense dans $[-1,1]$, c'est-à-dire que tout nombre réel entre $-1$ et $1$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par des nombres de la forme $\sin(n\theta)$.

1. Calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.
2. On note pour tout entier $n$, $u_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$. Justifier $u_n$ est bien défini puis montrer que $\sum_{n\geqslant 1} b_n = \sum_{n\geqslant 1} u_n$.
3. Calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$.
4. En déduire la valeur du produit de Cauchy de ces deux séries.
5. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ converge. Que dire du produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ avec elle-même ?
   Indication : on pourra utiliser après l'avoir montré que pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n$, $0 \leq k(n-k) \leq (\frac{n}{2})^2$.

**Exercice 29.** (Commutativité dans la somme d'une série).

1. Soit $\sum\limits_n u_n$ une série numérique à termes positifs ou nuls et $\sigma$ une bijection de $\mathbb{N}$. Montrer que les séries $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n u_{\sigma(n)}$ sont de même nature et qu'elles ont même somme dans le cas où elles convergent.
2. Montrer que le résultat de la question précédente est encore vrai si l'on suppose que la série $\sum\limits_n u_n$ est absolument convergente. (Indication : la série de terme général $|u_n| - u_n$ est alors une série convergente à termes positifs.)
3. On regarde maintenant l'effet d'un changement de l'ordre des termes dans une série qui converge sans être absolument convergente.
   (a) Rappeler la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$, et donner sa somme (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 24).
   (b) On réordonne les termes de la façon suivante, on prend le premier terme d'indice impair, puis les deux premiers termes consécutifs d'indice pair, et on recommence. Cela donne
   $$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \cdots$$
   C'est-à-dire on considère $\sum\limits_{n\geq 1} u_{\sigma(n)}$ avec
   $$\forall p \in \mathbb{N}\ \sigma(3p+1) = 2p+1\ ;\ \sigma(3p+2) = 4p+2\ ;\ \sigma(3p+3) = 4p+4.$$
   Montrer que la nouvelle série est convergente et calculer sa somme. Que remarquez-vous ?
   (c) Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 1$, est convergente.

(d) Soit $\sigma$ la permutation des entiers naturels définie par

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \sigma(3p) = 2p\ ;\ \sigma(3p+1) = 4p+1\ ;\ \sigma(3p+2) = 4p+3.$$

Montrer que la série $\sum v_{\sigma(n)}$ diverge. [3]

3. Dans le cas d'une série semi-convergente, on peut montrer que pour tout réel $\ell$ il existe une bijection $\sigma$ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum\limits_n u_{\sigma(n)}$ converge et a pour somme $\ell$. De même il existe une bijection $\sigma$ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum\limits_n u_{\sigma(n)}$ diverge vers $+\infty$, resp. $-\infty$.

# 3 Suites de fonctions

**Exercice 30.** Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n$. Déterminer sa limite simple.

**Exercice 31.** Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de fonctions définies par $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$ sur $[0,1]$.

1. Calculer la limite simple $f$ de la suite $(f_n)_n$.
2. Calculer pour tout $n$ fixé l'intégrale $A_n := \int_0^1 f_n(x)\,dx$.
3. Quel est le comportement de la suite numérique $(A_n)_n$ lorsque $n \to +\infty$ ? Comparer avec $\int_0^1 f(x)\,dx$.

**Exercice 32.** Considérons la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$ sur $\mathbb{R}$. Soit $f$ la limite simple de $(f_n)_n$. Étudier la suite des fonctions dérivées $(f'_n)_n$ et comparer la limite simple éventuelle de $(f'_n)_n$ lorsque $n \to +\infty$ avec la dérivée $f'$ de $f$.

**Exercice 33.** Soit la suite de fonctions $(f_m)_m$ définie par

$$f_m(x) = \lim_{n\to+\infty} \big(\cos(\pi m!\,x)\big)^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Expliciter $f_m(x)$ selon que $m!x \in \mathbb{Z}$ ou non. En déduire la limite simple de $(f_m)_m$.

*On notera que cet exercice montre qu'une limite de limites de fonctions continues (et même indéfiniment dérivables) peut n'être continue en aucun point*[4].

**Exercice 34.** Pour chacune des suites de fonctions $(f_n)_n$ suivantes

1. $f_n(x) = x^n(1-x)$ définie sur $E = [0,1]$ ;
2. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ sur $E = [0,1]$ ;
3. $f_n(x) = xe^{-n^2x}$ sur $E = [0,+\infty[$,

effectuer les tâches suivantes :

(a) déterminer la limite simple $f$ de $(f_n)_n$ et donner l'expression de $g_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$ ;

(b) pour tout $n$ fixé, déterminer le supremum $M_n$ de $g_n$ sur $E$ ;

(c) étudier la suite numérique $(M_n)_n$ et déterminer si $(f_n)_n$ converge uniformément sur $E$.

**Exercice 35.** Soit la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$ définies sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_n$.
2. Déterminer $M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ pour tout $n \geqslant 0$.
3. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur des segments et sur $\mathbb{R}$.

4. Remarque. Cela n'est possible qu'avec une limite de limites : en effet, on peut montrer (avec un outil qui n'est pas au programme de cette UE : le « théorème de Baire ») que la limite simple d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est continue en un ensemble de points qui est dense dans $\mathbb{R}$. (Observer que c'est bien le cas de $f_m$ pour tout $m$.)

**Exercice 36.** Étudier les convergence simple et uniforme, sur $E$, des suites de fonctions $(f_n)_n$ définies par

1. $f_n(x) = \dfrac{x+nx}{x+n}$ avec $E=[0,1]$ et $E=[0,+\infty[$.
2. $f_n(x) = (1-x^n)\sin(\pi x)$ avec $E=[0,1]$.
3. $f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-x) & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{pour } \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$, avec $E=[0,1]$.

**Exercice 37.** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ convergeant uniformément sur $]a,b[$. Montrer qu'elle converge uniformément sur $[a,b]$.

**Exercice 38.** Montrer que toute fonction limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite $(P_n)_n$ de fonctions polynomiales est une fonction polynomiale.
Indication : Utiliser que la suite $(P_n)_n$ est uniformément de Cauchy et qu'une fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$ est une fonction constante.

**Exercice 39.** (Polynômes de Bernstein) On considère $f$ une fonction continue sur $[0,1]$ et $x$ un réel arbitraire fixé de $[0,1]$. On définit

$$P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite de fonctions polynomiales $(P_n(f))_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f$.

1. Justifier que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x_1,x_2) \in [0,1]^2\ |x_1-x_2| < \eta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| < \epsilon$$

2. Montrer que

$$|f(x)-P_n(f)(x)| \leq \epsilon + 2\sup_{[0,1]}|f(x)| \sum_{k,\ |x-k/n|\geq\eta} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

3. Justifier que

$$\begin{aligned}\sum_{k,\ |x-k/n|\geq\eta} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &\leq \frac{1}{\eta^2}\sum_{k,\ |x-k/n|\geq\eta}(x-\frac{k}{n})^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{1}{\eta^2n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

4. Un petit détour par les probabilités : on rappelle que si une variable aléatoire suit une une loi binomiale de paramètres $n$ et $x \in [0,1]$ alors son espérance est $nx$ et sa variance $nx(1-x)$.
   En déduire que
   $$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$
   puis que
   $$|f(x) - P_n(f)(x)| \leq \epsilon + \frac{\sup_{[0,1]}|f(x)|}{2\eta^2 n}.$$
5. Conclure.

**Exercice 40.** Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \arctan(nx)$.

1. Déterminer son domaine de convergence et sa limite.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur $[-1,1]$ ? Et sur $[\delta, +\infty[$ avec $\delta > 0$ ?
3. Même question pour la suite des dérivées $(f_n')_n$.

**Exercice 41.** Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies par $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (1-n\,x)^2}$ sur $[0,1]$.

1. Montrer que les fonctions $f_n$ sont uniformément bornées
2. Déterminer la limite simple $f$ de $(f_n)_n$.
3. La convergence, est-elle uniforme sur $[0,1]$ ? Et sur un segment de la forme $[a,1]$ avec $a > 0$ ?

**Exercice 42.** On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies par $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx} + nx^3}{1 + nx^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple ainsi que la limite simple de $(f_n)_n$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ pour $a \geqslant 0$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_1^5 f_n(x)\,dx$.

**Exercice 43.** Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions donnée par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$ sur $[0, +\infty[$.

1. Déterminer son domaine de convergence simple et sa limite simple.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.
3. On pose $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que la suite numérique $(u_n)_n$ converge, et que sa limite $l \leqslant 1$.
4. Soit $a \in ]0,1[$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^a f_n(x)\,dx$, en déduire la valeur de la limite $l$.

**Exercice 44.** Soit $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ de la suite de fonctions donnée par $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$. Même question sur $[0, +\infty[$.

**Exercice 45.** (Fonction du blanc-manger)
Le but de cet exercice est de construire une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle part dérivable. Pour tout réel $x$ on note $g(x)$ la distance de $x$ à l'entier le plus proche. On peut montrer que $g$ est une fonction 1-périodique et que pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$ $g(x) = x$ et pour $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ $g(x) = 1 - x$.

1. Justifier que la série de fonctions de terme général $\dfrac{1}{2^k}g(2^k x)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
2. On note
$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} g(2^k x).$$
Justifier que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour comprendre le principe de construction de la fonction, tracer sur $[0, 1]$ la courbe représentative de $g$, de $\sum_{k=0}^{1} \frac{1}{2^k} g(2^k x)$ et de $\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{2^k} g(2^k x)$.
4. Soit $a$ un réel, $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites convergeant vers $a$ telles que de plus pour tout $n$, $a_n \leq a < b_n$, montrer en utilisant un DL d'ordre 1 que si $f$ est dérivable en $a$ alors la suite $(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n})_n$ converge vers $f'(a)$.
5. On définit pour tout entier $n$, $x_n = \frac{\lfloor 2^n a \rfloor}{2^n}$ et $y_n = x_n + \frac{1}{2^n}$. En revenant à la définition de la partie entière, on peut montre que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq x_{n+1} \leq a < y_{n+1} \leq y_n.$$
On va se servir de ces deux suites pour montrer que $f$ n'est pas dérivable en $a$.
   (a) Justifier que
   $$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(2^k y_n) - g(2^k x_n)}{2^k y_n - 2^k x_n}.$$
   Indication : penser à la définition de $g$.
   (b) Justifier que pour tout entier $k \in [0, n-1]$, $2^k x_n$, $2^k y_n$, $2^k x_{n+1}$ et $2^k y_{n+1}$ sont dans un même intervalle de type $[p, p + \frac{1}{2}]$ ou $[p + \frac{1}{2}, p + 1]$ avec $p$ entier.
   (c) En déduire que pour tout entier $k \in [0, n-1]$
   $$\frac{g(2^k y_{n+1}) - g(2^k x_{n+1})}{2^k y_{n+1} - 2^k x_{n+1}} = \frac{g(2^k y_n) - g(2^k x_n)}{2^k y_n - 2^k x_n}.$$
   Indication : le taux d'accroissement d'une fonction affine est constant.
   (d) En déduire que pour tout entier $n$
   $$\left| \frac{f(y_{n+1}) - f(x_{n+1})}{y_{n+1} - x_{n+1}} - \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \right| = \left| \frac{g(2^n y_{n+1}) - g(2^n x_{n+1})}{2^n y_{n+1} - 2^n x_{n+1}} \right| = 1.$$
   (e) Conclure.

# 4 Séries de fonctions

**Exercice 46.** Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ sur $E$, où

1. $u_n(x) = \dfrac{1}{xn^2}$ et $E = [a, +\infty[$ pour $a > 0$
2. $u_n(x) = \dfrac{1}{xn^2}$ et $E = ]0, +\infty[$.
3. $u_n(x) = \dfrac{1}{2^n(1+nx)}$ et $E = \mathbb{R}_+$.

**Exercice 47.**

1. Montrer que la série $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{z}{(1+|z|)^n}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

   Calculer $f(z)$.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{C}$ ?
3. Et sur des couronnes $\{z \in \mathbb{C} :\ a \leqslant |z| \leqslant b\}$ (où $0 < a < b$ sont des nombres réels) ?

**Exercice 48.** Pour $n \geqslant 1$ on pose $u_n(x) = x^n \ln(x)$ pour $x \in ]0,1]$ et $u_n(0) = 0$.

1. Est-ce que la fonction $u_n$ est continue sur $[0,1]$ ? On pose $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$.
2. Calculer $u(x)$. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions sur tout segment $[a,b] \subseteq [0,1]$.
3. On pose de façon classique $S_n(x) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} u_k(x)$ et $R_n(x) = \sum_{k\geqslant n+1} u_k(x)$ de sorte que $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$. Montrer que

$$\int_0^1 S(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx$$

**Exercice 49.** Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \frac{n\,x}{n^3 + x} \qquad \text{sur} \quad E = [0, +\infty[$$

1. Montrer que $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge pour tout $x \in E$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_n$ vers 0. Qu'en déduire pour la convergence de la série de fonctions $\sum_n f_n$ ?
3. Montrer que la fonction $f$ est quand même continue, en montrant la convergence normale sur $[0,a]$ pour tout $a > 0$.

**Exercice 50.** Quel est le domaine de convergence de $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} ne^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}$ ?

1. Discuter la convergence sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer $\int_1^2 f(x)\,dx$.

**Exercice 51.** Soit $(a_n)$ une suite réelle bornée.

1. Montrer que pour $x > 1$, la série $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-x}$ converge.
2. Montrer que la convergence est normale (donc uniforme) sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$.
3. Montrer que $f$ est continue et dérivable sur $]1, +\infty[$.

**Exercice 52.** Soit $(a_n)_n$ une suite positive décroissante qui converge vers 0. On pose comme d'habitude $R_n = \sum_{k\geqslant n+1}(-1)^k a_k$. Montrer que $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.

**Exercice 53.** Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

1. Discuter continuité et dérivabilité de la somme.
   Indication pour la dérivabilité : on pourra utiliser l'exercice précédent pour majorer le reste de la série de fonctions de terme général $f_n'(x)$.
2. Discuter la somme $g(x)$ de terme général $g_n(x) = |f_n(x)|$ : montrer dérivabilité de la somme pour $x > 0$.
3. Montrer que $g$ n'est pas dérivable en 0.
   Indication : minorer $|\frac{g(x)-g(0)}{x}|$ par $\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{1-e^{-nx}}{x}\frac{1}{1+n^2}$ et utiliser que pour tout réel $u$, $e^u \geq 1+u$.

**Exercice 54.** On considère la série $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} x^n \arccos\big(\dfrac{1}{n+x^2}\big)$.

1. Quel est le domaine de convergence de la série ?
2. Montrer l'uniformité de la convergence sur $[-a, a]$ pour $a \in \,]0, 1[$.
3. Étudier la dérivabilité de la somme $f(x)$.

**Exercice 55.** On considère la série de fonctions $u(x)$ de terme général

$$u_n(x) = x^n \arcsin\big(\frac{x}{n}\big), \qquad \text{pour} \quad x \in E = [-1, 1].$$

1. Pour quels $x \in E$ a-t-on convergence absolue ?
2. Déterminer le domaine de convergence de la série $u(x)$.
3. Montrer que la série $u(x)$ converge uniformément sur $[-a, a]$ pour tout $a \in ]0, 1[$.
4. Soit $a \in \,]0, 1[$. Montrer que la série

   $$\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1} \arcsin\big(\frac{x}{n}\big)$$

   converge uniformément sur $[-a, a]$.
5. En déduire l'expression pour $u'(x)$.

## 5 Séries entières

**Exercice 56.** Trouver le rayon de convergence des séries entières dont les termes généraux sont les suivants. Étude sur le cercle de convergence si nécessaire.

$$n^n z^n, \quad \frac{n^2}{3^n+n} z^n, \quad \left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n, \quad \frac{n^n}{n!} z^n, \quad \frac{1}{n!} z^n, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} z^n, \quad \frac{1}{n^{\ln(n)}} z^n,$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) z^n, \quad \sin(n\theta) z^n, \quad (\arctan(n^\alpha))\, z^n, \quad \left(1+\frac{\ln(n)}{2^n}\right) z^n.$$

**Exercice 57.** Soit $R$ le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2 z^n$ a pour rayon de convergence $R^2$.

**Exercice 58.** Soit $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme non nul. Soit $n_0 \geqslant 0$ tel que $P(n) \neq 0$ pour tout $n \geqslant n_0$. Comparer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n P(n) z^n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} \frac{a_n}{P(n)} z^n$.

**Exercice 59.**

1. Montrer que si $u_n(z) = \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} z^{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(z)$ est 1.
2. Montrer que la somme $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(z)$ est une fonction continue sur $[-1, 1]$.
3. Montrer que pour $|z| < 1$, $f(z) = -(z+1)^2 \ln(1+z) - (z-1)^2 \ln(1-z) + 3z^2$ (Indications : calculer $f''(z)$ ou utiliser la décomposition en éléments simples de $1/n(n+1)(2n+1)$).
4. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4\ln(2)$.

**Exercice 60.** En s'aidant des développements en série entière de fonctions classiques (dont on connaît le rayon de convergence), déterminer dans chacun des cas ci-dessous, le DSE de la fonction $f_i$, en précisant son rayon de convergence. Donner, en fonction de l'entier $n$, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

$$f_1(x) = \frac{1}{3-2x} \quad ; \quad f_2(x) = \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} \quad ; \quad f_3(x) = \ln(2x+3) \quad ;$$

$$f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad f_5(x) = \arcsin(x).$$

**Exercice 61.** Série géométrique et ses dérivées.

1. Calculer le rayon de convergence et la somme de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 0} nz^{n-1} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 0} n(n-1)z^{n-2}.$$

2. En déduire le rayon de convergence et la somme de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n}{2^{n+1}} z^n \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 0} (n^2+n+1)z^n.$$

**Exercice 62.**(Limite radiale) Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge. On note pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

1. On note pour $k \geq n$, $A_k(n) = \sum\limits_{i=n}^{k} a_i$ et pour $k < n$, $A_k(n) = 0$. En faisant une transformation d'Abel, montrer que pour tout $p \geq n+1$

$$\sum_{k=n}^{p} a_k x^k = (1-x)\sum_{k=n}^{p-1} A_k(n)x^k + A_p(n)x^p.$$

2. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $p \geq n+1$

$$\left|\sum_{k=n}^{p} a_k x^k\right| \leq \max_{n\leq k\leq p} |A_k(n)|$$

puis que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est uniformément de Cauchy sur $[0,1]$.

3. En déduire que $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$.

4. Donner un exemple de série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence 1 pour laquelle $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ admet une limite lorsque $x$ tend vers 1.

**Exercice 63.** *Cet exercice peut être traité directement ou en utilisant les résultats de l'exercice 62.*

1. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n z^{2n+1}$. Quelle est la somme $f(z)$ de cette série lorsque $|z| < 1$ ? Déterminer le rayon de convergence de cette série.

2. Pour $u \in ]-1,1[$, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{u^{2n+1}}{2n+2}$. A-t-on convergence normale de cette série sur $[0,1[$ ? A-t-on convergence uniforme sur $[0,1[$ ?

3. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ et de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

**Exercice 64.** En utilisant le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1} z^n$, calculer la somme $\sum_{n\geqslant 1}(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})z^n$.

**Exercice 65.**

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante : $\dfrac{1}{t^2+t}$.
2. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n(n+1)}$ pour $|z|<1$.

**Exercice 66.** *On pourra utiliser les résultats de l'exercice 62.*

En utilisant la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Même question avec $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

**Exercice 67.** Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

La fonction $g$ est-elle DSE au voisinage de 0 ?

**Exercice 68.** Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes :

$$\frac{1}{1-x-2x^2} \quad ; \quad \frac{x\sin(\alpha)}{x^2-2x\cos(\alpha)+1}.$$

(Indication : $x^2-2x\cos(\alpha)+1 = (x-e^{i\alpha})(x-e^{-i\alpha})$).

**Exercice 69.** Pour chacune des équations différentielles suivantes, montrer qu'il existe une fonction $f$, DSE au voisinage de 0, la vérifiant. On a donc $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, les coefficients $a_n$ vérifiant une relation de récurrence que l'on déterminera. Donner l'expression générale des $a_n$ et $R$ le rayon de convergence.

1. $$\begin{cases} (x^2+1)y''-2y=0, \\ y(0)=0, y'(0)=1. \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} xy''-2y'-xy=0, \\ y(0)=0. \end{cases}$$

**Exercice 70.** (Série génératrice)

Le but de l'exercice est de trouver une expression des termes de la suite $(c_n)_n$ [5] de

5. Remarque. $c_n$ est le $n$-ième nombre de Catalan, c'est par exemple le nombre de mots de Dyck de longueur $2n$ (mots binaires ayant autant de 0 que de 1 et tels que tout préfixe a un nombre de 0 inférieur ou égal au nombres de 1)

premier terme $c_0 = 1$ et satisfaisant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} c_{n-k}$$

en utilisant la série entière $C(x) = \sum\limits_{n \geq 0} c_n x^n$.

De la traduction combinatoire de $c_n$ on déduit que $c_n \leq 4^n$, on l'admet.

1. En utilisant la relation de récurrence et le produit de Cauchy, montrer que

$$\forall x \in ]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[ \quad C(x)^2 = \frac{C(x) - 1}{x}.$$

2. En déduire que $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.
3. Calculer le DSE de $\sqrt{1 - 4x}$.
4. Déduire des deux questions précédentes que $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

**Exercice 71.** (Série génératrice exponentielle) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n$ le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ (nombre de Bell), par convention $B_0 = 1$. On admet que [6]

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \leq n!$.
2. Pour tout $x \in ]-1, 1[$ on définit $B(x) = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n$. Justifier que $B$ est dérivable et montrer que

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad B'(x) = B(x) \exp(x).$$

3. En déduire que

$$B(x) = \frac{1}{e} \exp\left(\exp(x)\right).$$

4. En utilisant le DSE de la fonction exponentielle, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = \frac{1}{e} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m^n}{m!}.$$

6. Pour le montrer considérer l'ensemble $E_k$ des partitions de $\{1, \ldots, n+1\}$ telles que la partie contenant le nombre $n + 1$ a $k + 1$ éléments.

# 6 Séries de Fourier

**Exercice 72.** Calculer les coefficients de Fourier des fonctions $2\pi$–périodiques

1. $f(x) = \pi - |x|$ sur $] - \pi, \pi]$.
2. $g(x) = \pi - x$ sur $[0, 2\pi[$.
3. $h(x) = \max(0, \sin(x))$ sur $] - \pi, \pi]$

**Exercice 73.** Déterminer la série de Fourier de la fonction $2\pi$–périodique définie par $f(x) = 0$ sur $] - \pi, 0]$ et $f(x) = 1$ sur $]0, \pi]$. En déduire la valeur de la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

**Exercice 74.** Soit $h$ la fonction $2\pi$–périodique définie par $h(x) = \dfrac{\pi}{2} - |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de $h$. En déduire les sommes

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{puis} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}.$$

**Exercice 75.** Soit $f$ la fonction $2\pi$–périodique, définie par $f(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de $f$.
2. En déduire les valeurs des séries $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$.

**Exercice 76.** Soit $\lambda$ un paramètre réel $0 < \lambda < 2\pi$. On considère la fonction $2\pi$–périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} +1 & si \quad 0 \leqslant x < \lambda \\ -1 & si \quad \lambda \leqslant x < 2\pi \end{cases}$$

1. Tracer rapidement le graphe de $f$ sur l'intervalle $] - 3\pi, 3\pi[$.
2. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction $f$ et écrire la série de Fourier (en cos et sin).
3. En choisissant $x = 0$ trouver la somme de la série : $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin n\lambda}{n}$.
4. Soit $(0 < \lambda < 2\pi)$ et $(0 < \alpha < \pi)$. Déterminer la somme des séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1 - \cos(n\lambda)}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2$$

**Exercice 77.** Soit $f$ une fonction $2\pi$–périodique qui est de classe $C^1$ telle que $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx.$$

**Exercice 78.** (Décroissance des coefficients de Fourier).

1. Soit $f$ une fonction $2\pi$–périodique qui est de classe $C^{k-1}(\mathbb{R})$, telle que $f^{(k-1)}$ est dérivable et $f^{(k)}$ est continue par morceaux. Montrer que si $|f^{(k)}(x)| \leqslant M$, on a $|\widehat{f}(n)| \leqslant M|n|^{-k}, (n \neq 0)$.
2. En déduire que si $f$ est $2\pi$–périodique et de classe $C^2$, alors la série de Fourier converge normalement vers $f$.
3. Montrer que si $f$ est $2\pi$–périodique et $\alpha$-Hölderienne avec $\alpha \in ]0,1[$, c'est-à-dire

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^{\alpha} \qquad \text{pour tout } x, y$$

alors $|\widehat{f}(n)| \leqslant C'|n|^{-\alpha}$. Indication : soit $a \in \mathbb{R}$. Observer que

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)e^{-in(t+\frac{\pi}{n})}\,dt.$$

**Exercice 79.** (optimalité des résultats précédents) On revient sur la fonction $2\pi$–périodique $h$ définie par $h(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. Rappeler les coefficients de Fourier de $h$.

1. Soit $S_n(h,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k e^{ikx}$ la série de Fourier associé à $h$. Expliquer $h(x) = \lim S_n(h,x)$. En déduire $|h(x) - S_n(h,x)| \leqslant \frac{2}{\pi}(n-1)^{-1}$, $n \geqslant 2$.
2. Montrer que $|h(0) - S_n(h,0)| \geqslant \frac{2}{\pi}(n+2)^{-1}$, $n \geqslant 2$.

**Exercice 80.** (Une approche du phénomène de Gibbs) On note $f$ la fonction $2\pi$-périodique telle que $f(t) = t$ sur $[0, 2\pi[$. On note $S_N f$ sa $N$-ième somme partielle de Fourier pour $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer $\lim_{N\to+\infty} S_N f(t)$ pour $t \in [0, 2\pi[$.
2. Montrer que pour tout $t \in [0, 2\pi[$

$$S_N f(t) = \pi - 2\sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(kt)}{k}.$$

3. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} S_n f(\frac{\pi}{N}) = \pi - 2\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

(Indication : penser aux sommes de Riemann)

4. Conclure qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall \alpha > 0 \quad \liminf_{N\to+\infty} \sup_{t\in[0,\alpha]} |S_N f(t) - S_N f(0)| \geq c.$$

(Interprétation : « Au point de discontinuité 0 de $f$, $S_N f$ subit une forte oscillation ».)

## Le théorème de Fejér

**Exercice 81.** (un petit lemme bien utile) On introduit le noyau de Fejér sur $[-\pi,\pi]$ par $K_n(0) := n+1$ et pour $t \neq 0$

$$K_n(t) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}(n+1-|k|)e^{ikt} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2 \qquad \text{(l'égalité est admise).}$$

1. Observer que $K_n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [-\pi,\pi]$.
2. Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a $K_n(t) \to 0$ uniformément sur $F_\delta := \{x : \ \delta \leqslant |x| \leqslant \pi\}$. Indication : utiliser l'estimation $|\sin(\frac{t}{2})| \geqslant \sin(\frac{\delta}{2})$ sur $F_\delta$.
3. Montrer $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1$. Indication : rappeler d'abord $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Se rendre compte que ces trois propriétés ensemble impliquent que pour $n$ large, l'aire sous la courbe de $K_n$ est concentrée dans un voisinage très étroit de l'origine.

**Exercice 82.** Soit $f$ une fonction $2\pi$–périodique continue. Le but est de montrer que

$$\sigma_n(f,t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)f(t-s)\,ds \longrightarrow f(t) \qquad (n \to +\infty).$$

Voici l'heuristique de la démonstration : soit $\delta > 0$ très petit et $n$ très large. Alors

$$\sigma_n(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)f(t-s)\,ds \overset{(1)}{\approx} \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s)f(t-s)\,ds$$

puisque presque toute la masse de $K_n$ est concentrée autour de l'origine, voir l'exercice précédent. La fonction $f$ est continue en $t$ et donc à peu près constante sur $[t-\delta, t+\delta]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,t) &\overset{(1)}{\approx} \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s)f(t-s)\,ds \\ &\overset{(2)}{\approx} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s)\,ds\right) f(t) \\ &\overset{(3)}{\approx} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)\,ds\right) f(t) = f(t)\end{aligned}$$

**Trouver une démonstration rigoureuse de ce théorème** Indication : soit $t$ fixé et $\varepsilon > 0$ donné. Choisir d'abord le $\delta$ en fonction de la continuité de $f$ pour contrôler l'erreur dans (2), ensuite, avec $\delta$ fixé, choisir $n$ suffisamment grand pour contrôler l'erreur simultanément dans (1) et (3).

En déduire que si $f, g$ sont continues et $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ pour tout $n$ alors $f = g$.