université de BORDEAUX	ANNEE UNIVERSITAIRE 2022/2023 CODE UE : 4TPU102U **Maths Générales** L'équipe pédagogique	Collège Sciences &Technologies

Table des matières

Motivation

Pour comprendre mieux l'objet de ce cours, on va en fait le décrire en commençant...par la fin.

L'étude des objets mathématiques a un intérêt en tant que tel, mais elle est aussi indispensable dans toutes les études scientifiques; en effet c'est par une modélisation du monde en terme mathématiques qu'on arrive à des prédictions quantitatives et qu'on peut aussi obtenir une meilleure compréhension des phénomènes.

Par exemple, **en physique**, supposons que l'on souhaite décrire la trajectoire d'un solide soumis à certaines forces.

Si dans un premier temps on considère que ce solide est en fait un « point », si l'on suppose que l'on connaît les forces $\vec{F}$ qui s'exercent sur le solide, et si on note $x(t)$ la position dans l'espace du solide au temps t, on est amené à résoudre l'équation $m\vec{x}''(t) = \vec{F}$.

Oublions pour simplifier les flèches et qu'il s'agit de vecteurs : l'inconnue est une fonction x alors qu'on a une information sur sa dérivée seconde x'' : on doit résoudre une **équation différentielle**. (Ici elle est dite du *second ordre* car elle fait apparaître une dérivée seconde).

On rencontre aussi de telles équations en chimie, si on s'intéresse à l'évolution d'une concentration au cours du temps (**cinétique chimique**).

On verra en fin de semestre comment aborder l'étude de certaines de ces équations différentielles (du *premier ordre*, faisant apparaître des dérivées premières).

L'exemple le plus simple d'une telle équation différentielle consiste à chercher une fonction dont on connaît la dérivée : ce sera l'objet du calcul des **intégrales**, où l'on verra bien d'autres techniques que celles abordées au lycée.

Le calcul d'intégrale nécessitera bien évidemment le retour sur les notions de dérivée. D'autre part la recherche de solutions d'équations différentielles amène le besoin d'autres fonctions, et à élargir la palette des **fonctions usuelles**. Aux fonctions trigonométriques, exponentielles et log vues au lycée, vont s'ajouter les **fonctions puissances, les fonctions trigonométriques réciproques, etc**.

Pour les définir et étudier les propriétés de ces fonctions, et bien d'autres, on reverra et on approfondira les **fonctions, leur composition, les calculs de limites, de dérivées, etc**.

On reviendra enfin sur la **trigonométrie**, et on introduira les **nombres complexes** : outil très utile pour la géométrie dans le plan, outil également très utile pour la résolution de certaines équations en **électricité ou électronique**, ils ont une importance théorique fondamentale en mathématiques. S'ils permettent de trouver les racines des polynômes de degré 2, ils sont en fait essentiels pour l'étude des polynômes de tout degré.

Tout ceci suppose bien assimilées un certain nombre de techniques et de règles de calcul. On reviendra en particulier sur les **inégalités**, la **valeur absolue**, et on reprécisera ce que sont les **nombres réels** et **rationnels**. On verra aussi la **formule du binôme**, et une définition du coefficient binomial hors de toute loi binomiale.

Enfin, une caractéristique des mathématiques est qu'un théorème démontré n'a pas à être testé et confronté à la réalité, on sait qu'il est vrai. Cela se fait grâce à une exigence de rigueur dans le **raisonnement**. Il faut pour cela bien expliciter le **langage mathématique de la logique**, ce que signifient précisément les symboles $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, mais aussi $\cap$, $\cup$... Ce premier chapitre sera essentiel dans toute la suite puisqu'il explicite le vocabulaire et les règles de raisonnement utilisées par tout cours de mathématiques. Mais ce langage de la logique (dont la base est Vrai/Faux) sera aussi assez naturellement celui de **l'informatique** (à base de 0/1).

Ce cours correspond à l'enseignement dispensé dans l'UE de Mathématiques Générales de la Licence de Mathématiques du portail MISIPCG. Il s'appuie sur le programme de Terminale. Le serveur WIMS, site interactif de ressources multimédia en ligne, sera utilisé pour la «pratique» active des exercices.

Les modalités de contôle et d'utilisation de WIMS sont affichées sur Moodle :
`https://moodle1.u-bordeaux.fr/course/view.php?id=5859`

L'équipe pédagogique

1

Rudiments de logique et de théorie des ensembles

1.1 Opérations logiques

Une *proposition logique*, concernant divers objets mathématiques, est un énoncé qui doit être ou bien vrai (ce que l'on note V) ou bien faux (ce que l'on note F).

On construit avec ces propositions (ou « variables propositionnelles ») de nouvelles propositions (ou « formules propositionnelles ») en utilisant les connecteurs logiques suivants

1. La négation « **non** », notée $\neg$
2. La disjonction logique « **ou** », notée $\vee$
3. La conjonction logique « **et** », notée $\wedge$
4. L'**implication**, notée $\Rightarrow$
5. L'**équivalence**, notée $\Leftrightarrow$

La *valeur de vérité* d'une formule propositionnelle, c'est-à-dire l'interprétation de cette formule une fois que l'on s'est fixé des valeurs de vérité de ses variables propositionnelles, est définie par sa *table de vérité*. Ainsi, pour les formules définies par les connecteurs logiques élémentaires, on a les tables suivantes :

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

p	q	$p \Leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Attention :

1. Dans le langage courant, « ou » a en général un sens exclusif (fromage « ou » dessert). En mathématiques, le « ou » est toujours « inclusif » : si p et q sont toutes les deux vraies, $p \vee q$ est vraie.

2. Dire que « $p \Rightarrow q$ est vrai » ne signifie pas que p est vraie mais seulement que *si l'hypothèse p est vraie, alors la conclusion q l'est aussi.*
   Noter en particulier que, si p est fausse, $p \Rightarrow q$ est vrai... C'est pour cela que pour démontrer une implication $p \Rightarrow q$, on fait l'hypothèse que p est vraie, puisque si p est fausse il n'y a rien à démontrer. . .
3. La formule $p \Rightarrow q$ peut s'exprimer à l'aide des symboles de conjonction et de disjonction par l'une ou l'autre des phrases suivantes :
   - $\neg p \vee q$
   - $\neg (p \wedge (\neg q))$.
4. Lorsqu'une implication $p \Rightarrow q$ est vraie, on l'utilise ensuite dans des raisonnements « p est vraie et $p \Rightarrow q$ est vraie dont q est vraie ».

Attention : Un abus courant consiste à confondre une *formule propositionnelle* et sa *valeur de vérité*. Ainsi, dans un texte mathématique,

on écrira souvent « $p \Rightarrow q$ » pour dire que « $p \Rightarrow q$ est vraie ».

Avec cet abus de notation la formule « $p \Rightarrow q$ » se dit aussi parfois « si p, alors q », ou bien « p implique q », ou bien « pour que p soit vraie, il faut que q soit vraie », ou encore

— « une **condition suffisante** pour q est p »,

— « une **condition nécessaire** pour p est q ».

Définition 1.1. *On dit que deux formules propositionnelles F et G sont* équivalentes *et on écrit parfois $F \equiv G$), si elles ont même table de vérité.*

Voici quelques exemples importants de formules équivalentes :

- $\neg(p \wedge q)$ est équivalent à $(\neg p) \vee (\neg q)$.
- $\neg(p \vee q)$ est équivalent à $(\neg p) \wedge (\neg q)$.
- $(p \Leftrightarrow q)$ est équivalent à $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$.
- $(p \Rightarrow q)$ est équivalent à $((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$
- $\neg(p \Rightarrow q)$ est équivalent à $p \wedge (\neg q)$

Propriétés 1.2. (associativité et distributivité des connecteurs logiques)

- *$p \wedge (q \wedge r)$ est équivalent à $(p \wedge q) \wedge r$.*
- *$p \vee (q \vee r)$ est équivalent à $(p \vee q) \vee r$.*
- *$p \wedge (q \vee r))$ est équivalent à $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$*
- *$p \vee (q \wedge r)$ est équivalent à $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$*

1.1.1 Quelques mots sur les notations

Souvent, on utilise des systèmes de notations différents pour les opérations logiques. Dans ce polycopié, on va s'appuyer principalement sur le système de notation introduite à la sous-section précédente (*i.e.*, « $\wedge, \vee, \neg$ », etc.) Dans le recueil d'exercices de ce cours, on utilisera aussi le système de notation « alternatif » (*i.e.*, « et, ou, non, » etc.)

Le tableau suivant récapitule les notations d'opérations logiques que vous allez rencontrer dans ce polycopié ainsi que dans le recueil d'exercices.

Les opérations logiques	
$\neg$	non
$\wedge$	et
$\vee$	ou
$\Rightarrow$	idem
$\Leftrightarrow$	idem

Par exemple, soient p, q des propositions logiques. Les expressions « $\neg(p \wedge q)$ » et « non $(p \text{ et } q)$ » sont complètement équivalentes.

1.2 Quantificateurs

En mathématiques, on est amené à manipuler des propositions dépendant d'une variable parcourant un ensemble [1]. C'est dans ce contexte que l'on introduit les quantificateurs « $\forall$ » et « $\exists$ ».

Définition 1.3.

— *Le symbole $\forall$ signifie « quel que soit »(ou « pour tout »), on l'appelle le* quantificateur universel.

— *Le symbole $\exists$ signifie « il existe », on l'appelle le* quantificateur existentiel.

Si $p(x)$ est une proposition dépendant d'une variable x qui appartient à un ensemble E, on définit deux nouvelles formules, à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$:

1. *La proposition*
$$\boxed{\forall x \in E,\ p(x)}$$
qui est vraie si **la proposition $\mathbf{p(x)}$ est vraie pour tous les éléments $\mathbf{x}$ de $\mathbf{E}$**.
2. *La proposition*
$$\boxed{\exists x \in E,\ p(x)}$$
*qui est vraie s'***il existe au moins un élément $\mathbf{x}$ de $\mathbf{E}$ pour lequel $\mathbf{p(x)}$ est vraie**.

Remarques :

1. Les variables sont muettes : $\forall x,\ p(x)$ et $\forall y,\ p(y)$ désignent la même proposition.
2. La négation de $(\forall x \in E,\ p(x))$ est $(\exists x \in E,\ \neg(p(x)))$.
3. La négation de $(\exists x \in E,\ p(x))$ est $(\forall x \in E,\ \neg(p(x)))$.
4. En général, $(\forall x \in E, \exists y \in E, p(x,y))$ et $(\exists y \in E, \forall x \in E, p(x,y))$ sont deux propositions différentes.
5. Pour montrer que « $\exists x \in E, p(x)$ » est vraie, il suffit de trouver un x particulier dans l'ensemble E pour lequel $p(x)$ est vraie. Pour montrer que « $\forall x \in E, p(x)$ » est vraie, *un tel exemple ne suffit pas*.

   Montrer que « $\forall x \in E, p(x)$ » est faux revient à montrer que « $\exists x \in E, \neg p(x)$ » est vraie, donc il suffit de trouver un **contre-exemple**, c'est-à-dire un x pour lequel $p(x)$ est faux.

1.3 Raisonnement par contraposée

Principe : Soient p et q deux propositions. Supposons que l'on veuille prouver que la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie. Le principe de **contraposition** assure qu'il est équivalent de démontrer que la proposition $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ est vraie, que l'on appelle la **contraposée** de $p \Rightarrow q$.

Attention : Ne pas confondre la contraposée de $p \Rightarrow q$, qui est $\neg q \Rightarrow \neg p$, avec sa **réciproque** « $q \Rightarrow p$ ». La contraposée est équivalente à la proposition de départ, la réciproque ne l'est en général pas.

Exemple : Soient x et y deux réels. Montrer que
$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1).$$

1. On ne donnera pas de définition formelle de la notion d'ensemble, si ce n'est dire qu' « *un ensemble est une collection d'éléments, donnés dans un ordre indifférent* » . On note $x \in E$ pour indiquer que x est un élément de l'ensemble E.

Pour cela, montrons la contraposée de cette implication, qui est

$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Supposons donc que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$. En développant, on obtient

$$xy + y - x - 1 = xy - y + x - 1.$$

Après simplification, $x = y$.

1.4 Raisonnement par l'absurde

Le **raisonnement par l'absurde** est un principe de démonstration fondé sur le principe logique du **tiers exclu** qui affirme que $p \vee \neg(p)$ est toujours vrai.

Principe de la démonstration par l'absurde : Supposons que l'on veuille prouver que la proposition p est vraie. On suppose que $\neg(p)$ est vraie (ou que p est fausse), et l'on exhibe une contradiction, en utilisant notre système d'axiomes et/ou les règles de déduction logique. On en conclut alors que l'hypothèse faite sur p est fausse, donc que p est vraie.

Exemple : montrons par l'absurde que $x^3 - 2x^2 + 10x - \sqrt{2}$ n'admet pas de racine entière.

On suppose que la propriété est fausse, c'est-à-dire que $x^3 - 2x^2 + 10x - \sqrt{2}$ admet (au moins une) racine entière. On note n_0 une telle racine. On a donc $n_0^3 - 2n_0^2 + 10n_0 - \sqrt{2} = 0$. Donc $\sqrt{2} = n_0^3 - 2n_0^2 + 10n_0$. Mais n_0 est entier, donc $n_0^3 - 2n_0^2 + 10n_0$ également. Donc $\sqrt{2}$ est entier, ce qui est impossible.

Par conséquent $x^3 - 2x^2 + 10x - \sqrt{2}$ n'admet pas de racine entière.

La démonstration par l'absurde est très souvent utilisée pour montrer une non-existence, ou l'unicité de quelque chose.

1.5 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un principe de démonstration qui s'applique lorsque l'on veut démontrer qu'une certaine propriété $\mathcal{P}(n)$, dépendant d'un entier naturel n, est vraie pour tout entier (exemple : « montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $10^n - 1$ est un multiple de 9 »).

L'ensemble $\mathbb{N}$ des *entiers naturels* possède la propriété remarquable que chacune de ses parties non vides admet un plus petit élément [2]. Cette propriété est à la base du raisonnement par récurrence, dont le principe est rappelé ci-dessous :

Soit n_0 un entier, et $\mathcal{P}(n)$ une propriété de l'entier n, définie pour tout $n \geq n_0$. On fait les hypothèses suivantes :

(R1) La propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

(R2) Pour tout $n \geq n_0$, $(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$ est vraie.

Alors, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

1.6 Ensembles

1.6.1 Ensembles et parties d'un ensemble

Un ensemble est une collection d'éléments, donnés dans un ordre indifférent. On note $x \in E$ pour indiquer que x est un élément de l'ensemble E.

2. Cette propriété « ne va pas de soi », et elle est en fait « équivalente » au principe de récurrence. Il y a donc un apparent cercle vicieux dont l'éclaircissement dépasse le niveau de ce cours.

Si chaque élément d'un ensemble E est également élément de l'ensemble F on dit que E **est inclus** dans F, ou que E est **une partie** de F et on note $E \subset F$. On a donc :

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F.$$

Il existe par convention un ensemble ne contenant aucun élément, c'est l'**ensemble vide** noté $\emptyset$.

Méthode : pour montrer une inclusion $E \subset F$, on revient souvent à la définition : on montre $\forall x \in E, x \in F$.

Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments. Cela équivaut à dire que l'on a simultanément

$$E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

C'est le principe de « *double inclusion* » que l'on utilise très souvent en pratique pour établir l'égalité de deux ensembles. Noter enfin que tout ensemble est contenu dans lui-même ($E \subset E$) et que l'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles ($\emptyset \subset E$).

Attention : La notation $E \subset F$ signifie que E est inclus dans F « au sens large », c'est-à-dire que E est *éventuellement* égal à F. Pour distinguer inclusion *au sens strict* et *au sens large*, on introduit parfois les notations $E \subseteq F$ (E est inclus dans ou égal à F) et $E \subsetneq F$ (E est inclus dans F strictement). Les notations $E \subset F$ et $E \subseteq F$ signifient donc *exactement la même chose*.

On peut décrire un ensemble **en extension** en donnant tous ses éléments entre accolades (par exemple : $E = \{1, 3, 7, 5, 2\}$).

On peut aussi décrire un sous-ensemble E d'un ensemble F **en compréhension**, c'est-à-dire en donnant une propriété qui caractérise ses éléments : $E = \{x \in F \mid p(x)\}$ est l'ensemble de tous les éléments de F pour lesquels la propriété $p(x)$ est vraie (par exemple : $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$).

Enfin, on définit souvent un ensemble en donnant une manière de construire chacun de ses éléments ; par exemple $\{n^2, n \in \mathbb{N}\} = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}, m = n^2\}$.

Proposition 1.4. *Soient A, B et C trois ensembles. L'inclusion « $\subset$ » a des propriétés suivantes :*

— $A \subset A$,

— $A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A = B$,

— $(A \subset B$ et $B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$.

Définition 1.5. *L'ensemble des parties d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$ est formé de tous les ensembles inclus dans E. En particulier, il contient toujours $\emptyset$ et E.*

Exemple : $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

Attention, Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont eux-mêmes des ensembles. En particulier, l'ensemble des parties du vide *n'est pas vide* : $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ contient un élément, à savoir l'ensemble vide...

1.6.2 Opérations sur les ensembles

Définition 1.6. *Soient E et F deux ensembles. La* **réunion** *de E et F notée $E \cup F$ est formée des éléments qui appartiennent à E ou à F. On a donc*

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E \text{ ou } x \in F).$$

Définition 1.7. *Soient E et F deux ensembles. L'***intersection** *de E et F notée $E \cap F$ est formée des éléments qui appartiennent à E et à F. On a donc*

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \in F).$$

Si $E \cap F = \emptyset$ on dit que E et F sont **disjoints**.

Proposition 1.8. *Si E, F, G sont trois ensembles, on a les égalités suivantes :*
- *Commutativité :* $E \cup F = F \cup E$ *et* $E \cap F = F \cap E$
- *Associativité :* $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ *et* $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$
- *Distributivité 1 :* $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$
- *Distributivité 2 :* $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.
- $E \cup \emptyset = E$ *et* $E \cap \emptyset = \emptyset$
- $E \cap E = E \cup E = E$

Définition 1.9. *Soit E un ensemble et F une partie de E. Le* **complémentaire** *de F dans E noté $\complement_E F$ (ou parfois F^c) est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F. On a donc $\complement_E F = \{x \in E / x \notin F\}$. En particulier, $\complement_E F \cup F = E$ et $\complement_E F \cap F = \emptyset$.*

Définition 1.10. *Soient F et G deux parties d'un ensemble E. L'ensemble $F \setminus G$ est l'ensemble formé des éléments de E qui appartiennent à F et pas à G. On a donc $F \setminus G = F \cap (\complement_E G)$. En particulier, $E \setminus F = \complement_E F$, $E \setminus \emptyset = E$*

Proposition 1.11. *Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On a les propriétés suivantes :*
1. $A \subset B \Longleftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$.
2. $\complement_E \left(\complement_E A\right) = A$, $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$, *et* $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.

Remarque : L'union, l'intersection et le complémentaire sont la traduction en terme d'appartenance à un ensemble des opérations logiques « et », « ou » et « non ».

Définition 1.12. *Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F noté $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que x est éléments de E et y est élément de F.*

1.7 Applications

Soient E et F des ensembles donnés.

Définition 1.13. *Une application f allant de E dans F est une correspondance (ou un règle) qui associe à tout élément $x \in E$* au plus *un élément $f(x) \in F$, c'est à dire*

$$\begin{array}{cccc} f: & E & \to & F \\ & x \in E & \mapsto & f(x) \in F. \end{array}$$

Exemple 1. — *(définition d'une application en extension) Soient*

$$A = \{0, 1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5\}.$$

La correspondance $f : A \to B$ définie par

$$f(0) = 5, f(1) = 2, f(2) = 3, \text{ et } f(3) = 4$$

est une application. La correspondance $g : A \to B$ donnée par $\forall a \in A : g(a) = 2$ en est une autre. Par contre, la correspondance $h : A \to B$ définie comme

$$h(0) = 2, h(1) = 2, h(2) = 3, h(3) = \{3, 4\}$$

n'en est pas une car la définition 1.13 n'est pas satisfaite.

— *(définition d'une application en compréhension) Par exemple,*

$$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

définies par $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = 2n, g(n) = 2n + 1$ *sont bel et bien des applications.*
La correspondance $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *donnée par* $\forall n \in N : h(n) = 2n - 1$ *n'est pas bien définie, car* $h(0) = -1 \notin \mathbb{N}$. *Par contre, on peut considérer* h *comme une application* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$ *bien licite.*
La correspondance $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *donnée par* $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2$ *est une application. La correspondance* $G : [0, +\infty[_x \to \mathbb{R}_y$ *telle que* $y = G(x)$ *lorsque* $x = y^2$ *n'est pas une application.*

Définition 1.14. *Soit* $f : E \to F$ *une application, et, pour* $x \in E$*, on a* $y = f(x) \in F$*. Alors*
— y *est appelé* l'image *de* x *(par* f*), et* x *est appelé* un antécédent *de* y *(par* f*).*
— E *est* l'ensemble de départ *(pour* f*), et* F *est* l'ensemble d'arrivée *(idem).*
— *on appelle* le domaine de définition *de* f *(ou bien* le domaine de f *tout court) (la notation :* $D_f, Dom(f), Dom\, f$*) l'ensemble de* $x \in E$ *pour lesquels* $f(x)$ *est bien définie.*

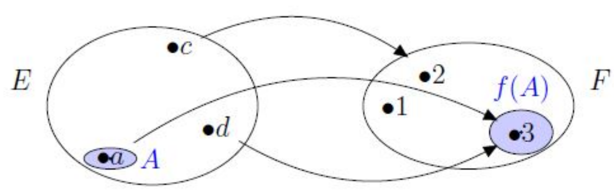
1.7.1 Image directe, image réciproque

Soit, comme avant, $f : E \to F$ une application.

Définition 1.15. *Pour toute partie* A *de* E*,* $A \subset E$*, on définit* l'image *(ou bien* l'image directe*)* $f(A)$ *comme*

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\} = \{y \in F : \exists a \in A, y = f(a)\}.$$

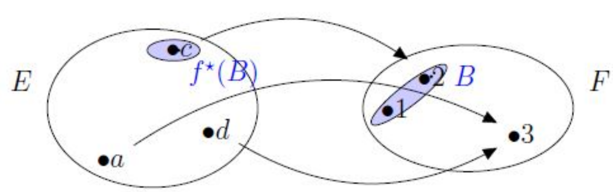
Autrement dit, $f(A)$ est une partie de E formée par les images $f(a)$, où a parcourt $A \subset F$.



Définition 1.16. *Pour toute partie* B *de* F*,* $B \subset F$*,* l'image réciproque $f^{-1}(B)$ *est donnée par*

$$f^{-1}(B) = \{a \in E : f(a) \in B\}.$$

C'est à dire, l'image réciproque $f^{-1}(B)$ est exactement la partie $A \subset E$ telle que $f(A) = B$.



Donnons encore un exemple un peu plus calculatoire.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application donnée par $f(x) = x^2$. Il est facile de voir que $f(\pm 1) = 1$ et $f(\pm 2) = 4$.

Pour des images, on a

$$f([1,2]) = [1,4],\ f([-1,1]) = [0,1],\ f(\{1,2\}) = \{1,4\},\ f(\{-1,2\}) = \{1,4\}.$$

Pour les images réciproques, on a

$$f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2],\ f^{-1}(\{1,4\}) = \{-1,1,-2,2\},\ f^{-1}(\{2\}) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$$

1.7.2 Composition des applications

Soient $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux applications vérifiant la condition $f(F) \subset G$.

Définition 1.17. L'application composée *de g et f, notée $g \circ f$, est une application allant de E à H selon la formule*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & E & \to & H, \\ & x \in E & \mapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in H. \end{array}$$

Notons que, généralement, $g \circ f \neq f \circ g$. Si les applications $h \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies, nous avons

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Exemple : Soient $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ des applications données par

$$f(n) = n^3, \quad g(n) = 2n + 3, n \in \mathbb{Z}.$$

Nous avons $f \circ g(n) = f(2n+3) = (2n+3)^3$ et $g \circ f(n) = g(n^3) = 2n^3 + 3$.

1.8 Sommes, dénombrements et formule du binôme

1.8.1 Sommes et quelques règles de leur manipulation

Les résultats de cette sous-section s'appliquent aux sommes à termes réels aussi bien que complexes ; pour la simplicité, nous nous concentrons sur le cas de termes réels.

Soient donc $a_1, a_2, \ldots a_n$ des nombres réels.

Définition 1.18. *La somme $\sum_{k=1}^n a_k$ est définie comme*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \ldots a_n.$$

Remarques :

— l'indice de sommation (i.e. k dans la définition 1.18) est *muette*, c.à.d. on peut changer son nom sans changer la valeur de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{s=1}^{n} a_s.$$

— on peut repartir les termes de la somme en deux (trois, etc.) sommes. C'est à dire, pour tout m, $1 \leq m \leq n$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

— selon nos besoins, on peut effectuer « le changement d'indice » dans la somme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1} = \sum_{s=11}^{n+10} a_{s-10}.$$

Pour passer à la deuxième somme, on a posé $j = k+1$ (ou bien $k = j-1$), et $s = k+10$ (ou $k = s-10$) pour la troisième somme.

Donnons aussi quelques informations sur les sommes doubles. Soient (a_{ik}) des nombres énumérés par un indice double (i,k), où $i = 1, \ldots, m$ et $k = 1, \ldots, n$. Il est commode de les visualiser sous une forme de tableau comme suit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Définition 1.19. *La* somme double *est définie comme*

$$\begin{aligned} S = \sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq k\leq n}} a_{ik} \quad = \quad & a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ & + a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ & \;\;\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & + a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn}. \end{aligned}$$

Observons que la valeur de la somme S ne dépend pas de l'ordre de sommation de termes a_{ik}. Cela signifie qu'en pratique on peut choisir l'ordre de sommation qui nous arrange le plus (et qui nous facilite la tache du calcul). Voici quelques exemples :

— « la sommation ligne par ligne » (c'est la méthode qui est donnée dans la définition 1.19) :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \Big) \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} \Big) + \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{2k} \Big) + \cdots + \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{mk} \Big). \end{aligned}$$

— « la sommation colonne par colonne » :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} \Big) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} \Big) + \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{i2} \Big) + \cdots + \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{in} \Big). \end{aligned}$$

— on peut imaginer des « méthodes de sommation » bien plus compliquées. Par exemple, ci-dessous, la somme S est repartie en deux sommes correspondant aux éléments qui se trouvent au-dessus en en dessous de la diagonale principale :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} \right) + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=i}^{n} a_{ik} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{i} a_{ik} \right) + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \right). \end{aligned}$$

Exemple : Soient $(a_{ik})_{i=1,\dots,n;k=1,\dots,n}$ des nombres réels définis par

$$a_{ik} = \begin{cases} k-i+1, & \text{si } k \geq i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} .$$

On peut les représenter par le tableau suivant

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de la somme (par les diagonales, parallèles à la diagonale principale) donne

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,n}} a_{ik} = n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + n \\ &= \sum_{j=1}^{n} j(n-j+1). \end{aligned}$$

La valeur de cette dernière somme n'est pas difficile à trouver, mais nous omettons ce calcul (...néanmoins, une indication pour un lecteur intéressé : $n(n+1)(n+2)/6\dots$).

1.8.2 Dénombrement : principes de base

On se contente d'une notion intuitive de cardinal pour les ensembles finis (« nombre d'éléments »).

Proposition 1.20. *Soient E et F deux ensembles finis.*

1. *« Principe de la somme ». Si E et F sont disjoints, alors*

$$\operatorname{Card}(E \cup F) \;=\; \operatorname{Card} E \;+\; \operatorname{Card} F.$$

2. *« Principe du produit » :* $\operatorname{Card}(E \times F) \;=\; \operatorname{Card} E \;\times\; \operatorname{Card} F$, *où $E \times F = \{(x,y) \mid x \in E,\ y \in F\}$ est le produit cartésien de E et F.*

Corollaire 1.21.

1. *Si A est une partie d'un ensemble fini E, on a* $\operatorname{Card} \complement_E A = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} A$.
2. *Si E et F sont deux ensembles finis, non nécessairement disjoints, on a*

$$\operatorname{Card}(E \cup F) \;=\; \operatorname{Card} E \;+\; \operatorname{Card} F \;-\; \operatorname{Card}(E \cap F).$$

1.8.3 Combinaisons, coefficients binômiaux, formule du binôme

Définition 1.22. *Soit n un entier non nul. On appelle « n factoriel » et note $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.*
Par convention $0! = 1$.

Ainsi $1! = 1$, $2! = 2$ et $3! = 6$.
Remarque : $n!$ correspond au nombre d'ordres possibles pour n objets.

Définition 1.23. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une **combinaison de** k **éléments parmi** n est une partie à k éléments d'un ensemble de cardinal n. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$ ou C_n^k.*

Par exemple si on a 50 personnes, il y a $\binom{50}{10}$ échantillons possibles de 10 personnes. Si on dispose d'un jeu de 32 cartes, il y a $\binom{32}{8}$ « mains »possibles différentes de 8 cartes.

Proposition 1.24.

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.*
3. *Si $0 < k < n$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.*

La propriété 1.243 est à la base du « triangle de Pascal »dont les premières lignes sont représentées sur la figure 1.1

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

FIGURE 1.1 – Triangle de Pascal

Remarques.

1. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini au lycée comme « *le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions d'une même expérience aléatoire modélisées par un arbre* ». Cette définition est équivalente à celle adoptée ici.
2. Au lycée, on ne donne pas de formule explicite, en fonction de n et de k, pour le calcul des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$. Une telle formule s'obtient cependant très facilement à partir de la proposition 1.24 3, comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire 1.25. *Si $0 \leq k \leq n$ sont deux entiers naturels, on a :*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Preuve. Récurrence sur n, en utilisant la proposition 1.24 3.

Proposition 1.26. *(Formule du binôme) Soient x et y deux réels (ou deux complexes) et n un entier naturel. On a*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Preuve. On fait une récurrence sur n, pour x et y fixés.

Initialisation ($n = 0$) : on a $(x+y)^0 = 1 = \sum\limits_{k=0}^{0} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

et montrons qu'elle se transmet au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ grâce à l'hypothèse de récurrence} \\
&= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+\mathbf{1}} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+\mathbf{1}-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n+\mathbf{1}-(k+\mathbf{1})} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{\ell} y^{n+1-\ell} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \text{ en posant } \ell = k+1 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= y^{n+1} + \left[\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right)}_{\binom{n+1}{k}} x^k y^{n+1-k} \right] + x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Donc notre formule est vraie pour tout $n \geq 0$ □

Corollaire 1.27. *Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre de parties de E est égal à* 2^n.

1.9 Inégalités, valeur absolue et partie entière

1.9.1 Inégalités

Les nombres réels sont ordonnés (ce que ne seront pas les nombres complexes). Rappelons les propriétés que vérifient les relations d'inégalité :

Quels que soient les réels x, y, z, t :

1. $x \leq y$ si et seulement si $y - x \geq 0$ (Pour démontrer une inégalité, on peut donc toujours se ramener à étudier le signe d'une quantité)
2. $(x \leq y$ et $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (*transitivité*)
3. $(x \leq y$ et $z \leq t) \Rightarrow x + z \leq y + t$
4. Si $a > 0$, $x \leq y \Rightarrow ax \leq ay$
5. Si $a < 0$, $x \leq y \Rightarrow ax \geq ay$

Proposition 1.28. *Si x et y sont deux réels* **positifs**, $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$
Si x et y sont deux réels **négatifs**, $x \leq y \Rightarrow y^2 \leq x^2$

Démonstration. On suppose $x \leq y$, c'est-à-dire $y - x \geq 0$. On a $y^2 - x^2 = (y - x)(x + y)$. Donc $y^2 - x^2$ est du signe de $x + y$. Si x et y sont positifs on a donc bien $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$, et si x et y sont négatifs, $x \leq y \Rightarrow y^2 \leq x^2$. □

Proposition 1.29. *Si x et y sont deux réels* **strictement positifs,** $x \leq y \Rightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$.

Preuve à faire en exercice.

Rappels de notations : on note par

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$.
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$.
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$.
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$.
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$.
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$.
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$.

1.9.2 Valeur absolue

Définition 1.30. *Si x est un réel, sa valeur absolue, notée $|x|$, est*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x \leq 0. \end{cases}$$

La valeur $|x|$ mesure la **distance** *du réel x au réel* 0.
En particulier, quel que soit le réel x, $|x|$ est positif (ou nul).
Si x et y sont deux réels, $|x - y|$ mesure la distance entre les réels x et y.

Remarques

Pour tout réel x

- $|x^2| = |x|^2 = x^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$.
- $x \leq |x|$.

Propriétés 1.31. *Pour tous réels x et y,*

1. $|xy| = |x||y|$
2. $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)*
3. $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x-y|$.
4. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
5. *Si $r \geq 0$, $|x-a| \leq r \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r$. Cela équivaut à $x \in [a-r, a+r]$.*
6. *Si $r > 0$, $|x-a| < r \Leftrightarrow a-r < x < a+r$. Cela équivaut à $x \in]a-r, a+r[$.*

Démonstration. Pour le deuxième point, puisque les deux termes de l'inégalité sont positifs, il suffit de comparer leurs carrés. Or
$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ et
$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = x^2 + y^2 + 2|xy|$.
Comme $xy \leq |xy|$, on en déduit bien que $|x+y| \leq |x| + |y|$. □

1.9.3 La fonction partie entière

Définition 1.32. *Si x est un réel, la partie entière de x, notée $E(x)$, est le plus grand entier inférieur ou égal à x. $E(x)$ est donc caractérisé par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Par exemple, $E(1.6) = 1$ et $E(-1.2) = -2$.

Proposition 1.33. *Pour tout entier n et pour tout réel x, $E(x+n) = E(x) + n$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $E(x) + n$ est bien un entier qui vérifie $(E(x) + n) \leq x + n < (E(x) + n) + 1$ □

Remarques

Pour un nombre réel x, on appelle partie fractionnaire de x et on note $\{x\}$ la différence entre x et sa partie entière :

$$\{x\} = x - E(x).$$

La définition de $E(x)$ permet donc d'affirmer que $\{x\} \in [0, 1[$.

2 Nombres Complexes

L'objectif de ce chapitre est le calcul des racines d'un nombre complexe et la résolution de polynôme de second degré à coefficient complexe. Ce chapitre commence par des **rappels** sur la trigonométrie.

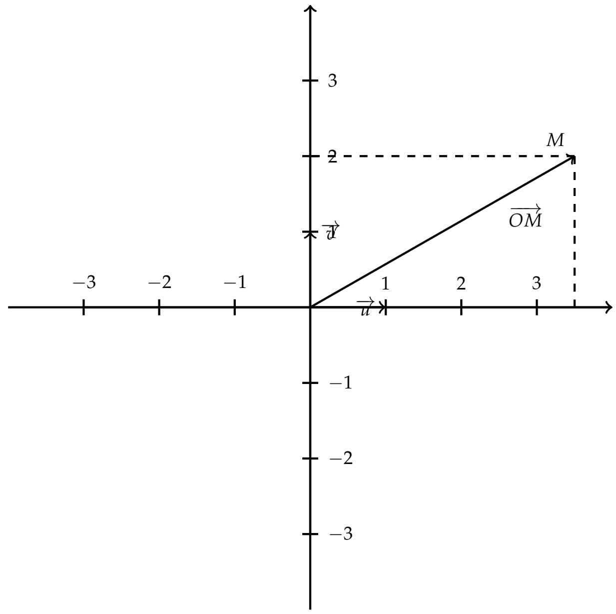
Nous allons ensuite construire l'ensemble des nombres complexes qui sera noté $\mathbb{C}$. En effet, l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est trop petit pour résoudre des équations polynomiales simples, même avec des coefficients entiers. Un exemple simple est le cas de l'équation $x^2 + 1 = 0$. L'idée de cette construction est assez simple, puisque la droite réelle est trop petite, nous allons considérer les points du plan pour lesquels nous allons définir des opérations algébriques d'addition (qui n'est rien d'autre que l'addition des vecteurs du plan) et de multiplication dont l'interprétation géométrique sera donné dans la suite en terme de rotation et d'homothétie.

2.1 Trigonométrie

Afin de mesurer des angles, nous allons utiliser le radian et non le degré. On passe de l'un à l'autre par la relation de proportionnalité suivante :

$$\mathrm{Rad}(A) = \frac{\mathrm{Deg}(A)}{180}\pi \text{ pour un angle } A.$$

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ que l'on suppose orienté dans le sens direct, c'est à dire que l'on passe du vecteur $\overrightarrow{u}$ au vecteur $\overrightarrow{v}$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Dans ce repère, on représente les points du plan par les coordonnées cartésiennes de sorte qu'un point M de coordonnée $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit sous la forme $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.



On mesure ainsi l'angle orienté entre deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$, noté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ comme l'angle de la rotation permettant de passer de $\overrightarrow{OM}$ vers $\overrightarrow{ON}$ dans le sens direct. Les angles sont définis modulo un tour complet, c'est à dire en radian modulo 2π. Par exemple, pour le point $M = (0, 1)$, on a

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{u}) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Remarque 2.1. *Si l'un des deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ ou $\overrightarrow{ON}$ est nul, l'angle n'est pas défini.*

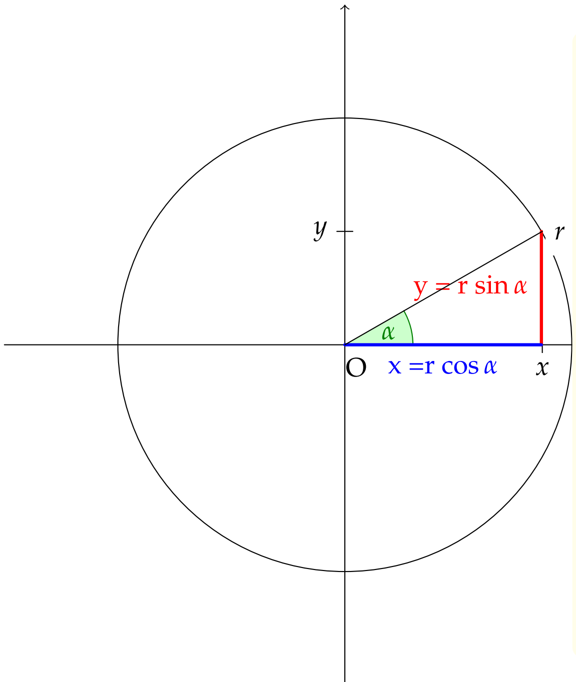
Rappelons également la propriété d'additivité des angles orientés. Si A, B et C sont trois points du plans différents de O, on a :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}).$$

Le théorème de Pythagore permet une autre représentation du point $M = (x, y) \neq O$ en utilisant le triangle rectangle $(0, 0), (x, y), (x, 0)$. On remarque que :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r\cos(\alpha) \quad \text{et} \quad y = r\sin(\alpha),$$

Ici $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ représente la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$ alors que $\alpha = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.



l'angle α a dans cet exemple $\frac{\pi}{6}$ (Rad) (soit 30°). Le sinus de α, qui est au facteur r près, d'après Pythagore, la hauteur y de la ligne rouge est ici

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

Le théorème de Pythagore donne le rayon du cercle $r = x^2 + y^2$. La longueur x de la ligne bleue est au facteur r près le cosinus de α, ici dans l'exemple

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On déduit :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

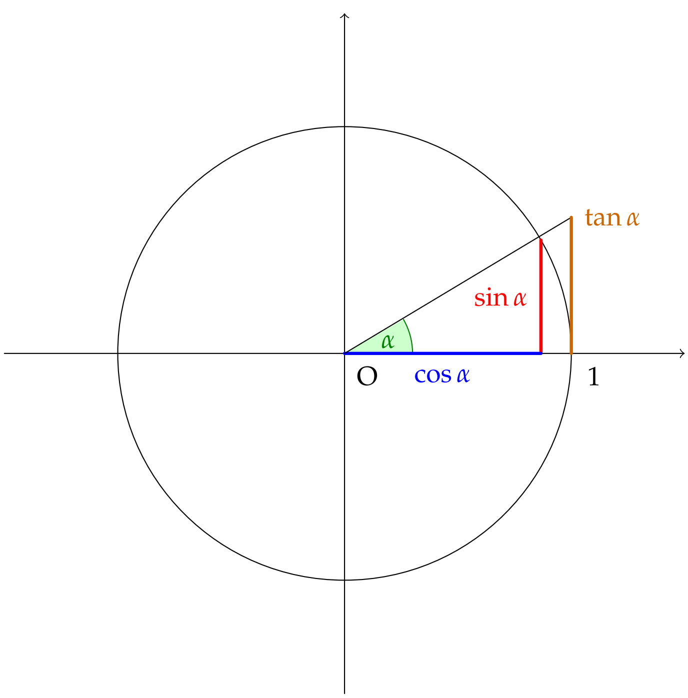
On a une autre représentation du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ à l'aide de $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et de l'angle $\alpha = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ sous la forme :

$$\overrightarrow{OM} = r\cos(\alpha)\overrightarrow{u} + r\sin(\alpha)\overrightarrow{v}, \text{ avec } r = \|\overrightarrow{OM}\| \text{ et } \alpha = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}).$$

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre $O = (0,0)$ et de rayon 1, on parle également de point sur le cercle unité $\mathcal{C}$, définie par :

$$\mathcal{C} = \{M = (x,y) |\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Dans ce cas particulier, puisque $r = 1$, on obtient alors directement :



Ainsi, pour un point $M = (x, y) \in \mathcal{C}$, on a

$$\overrightarrow{OM} = \cos(\alpha)\overrightarrow{u} + \sin(\alpha)\overrightarrow{v}, \text{ avec } \alpha = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}),$$

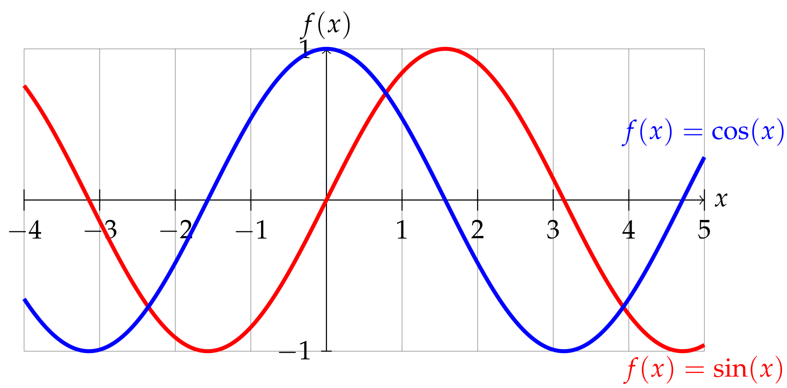
c'est à dire $x = \cos(\alpha)$ et $y = \sin(\alpha)$.

Propriétés 2.1.
- *La fonction cosinus est continue sur* $\mathbb{R}$, 2π*-périodique, paire.*
- *La fonction sinus est continue sur* $\mathbb{R}$, 2π*-périodique, impaire.*
- *La fonction tangente,* $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *est définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$*, continue sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme* $\frac{\pi}{2} + k\pi$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*),* π*-périodique, impaire.*
- *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin)'(x) = \cos(x) \quad \textit{et} \quad (\cos)'(x) = -\sin(x).$$

- *La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme* $\frac{\pi}{2} + k\pi$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*), et :* $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

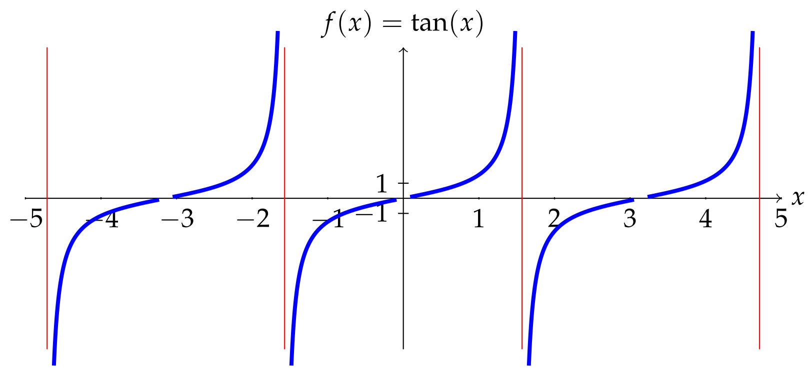
Courbes représentatives de $\sin x$ et $\cos x$ et $\tan x$



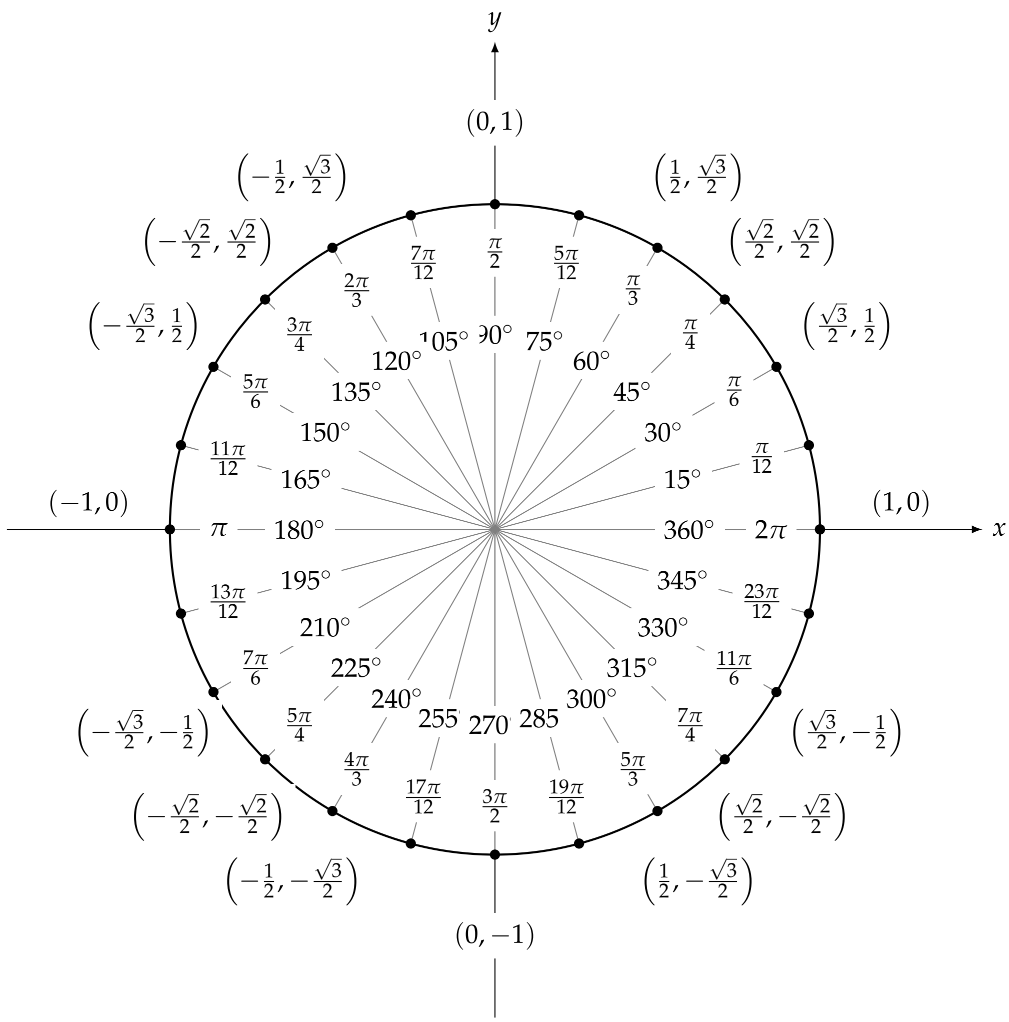
Remarque 2.2. *On peut remarquer empiriquement sur le graphique que :*

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Le graphe du sinus se déduit de celui du cosinus par une translation.



La table des valeurs remarquables des cosinus et sinus est ainsi représentée sur le cercle unité, qu'on appelle également **cercle trigonométrique** ci-dessous :



Cercle trigonométrique

On donne de façon équivalente,sous forme de tableau, certaines valeurs souvent rencontrées qui permettent de retrouver l'argument de certains nombres complexes :

Voici quelques valeurs :

x en degrés : x en radians :	0 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	0
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Formules de trigonométrie

Soient $x, y, a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$	$\tan(\pi + x) = \tan(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{-1}{\tan(x)}$
$\cos(2\pi + x) = \cos(x)$	$\sin(2\pi + x) = \sin(x)$	$\tan(2\pi + x) = \tan(x)$

— $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, et donc $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

— $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,

— $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, et donc $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,

— $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

Pour démontrer géométriquement les formules additives on considère les points $M, N \in \mathcal{C}$ tels que

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) = \alpha \text{ et } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON}) = \alpha + \alpha'.$$

On considère également le point $M' \in \mathcal{C}$ tel que $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ forme un repère orthonormé direct.

On écrit $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

$$\overrightarrow{OM} = \cos(\alpha)\overrightarrow{u} + \sin(\alpha)\overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{OM'} = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})\overrightarrow{u} + \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})\overrightarrow{v}$$

On écrit $\overrightarrow{ON}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$:

$$\overrightarrow{ON} = \cos(\alpha + \alpha')\overrightarrow{u} + \sin(\alpha + \alpha')\overrightarrow{v}$$

On écrit $\overrightarrow{ON}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$:

$$\overrightarrow{ON} = \cos(\alpha')\overrightarrow{OM} + \sin(\alpha')\overrightarrow{OM'}$$

Ce qui sans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ donne :

$$\overrightarrow{ON} = \cos(\alpha')(\cos(\alpha)\overrightarrow{u} + \sin(\alpha)\overrightarrow{v}) + \sin(\alpha')(\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})\overrightarrow{u} + \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})\overrightarrow{v})$$

Soit en utilisant les formules du tableau ci dessus :

$$\overrightarrow{ON} = \cos(\alpha')(\cos(\alpha)\overrightarrow{u} + \sin(\alpha)\overrightarrow{v}) + \sin(\alpha')(-\sin(\alpha)\overrightarrow{u} + \cos(\alpha)\overrightarrow{v})$$

On développe :

$$\overrightarrow{ON} = (\cos(\alpha')\cos(\alpha) - \sin(\alpha')\sin(\alpha))\overrightarrow{u} + (\cos(\alpha')\sin(\alpha) + \sin(\alpha')\cos(\alpha))\overrightarrow{v}$$

Lorsque $a = b$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a, \\ \\ \sin 2a = 2 \sin a \cos a \text{ et } \tan 2a = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \end{array}}$$

En sommant ou en faisant la différence de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ (même chose pour sin), on obtient les formules de transformation de produits en sommes :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos a \times \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \\ \sin a \times \sin b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right) \\ \sin a \times \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right) \end{aligned}}$$

Si on pose $p = a+b$ et $q = a-b$ dans les formules précédentes

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} & \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} & \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \end{array}}$$

$$t = \tan\frac{a}{2}.$$

Les fonctions sinus et cosinus peuvent s'exprimer en fonction de $t = \tan\frac{a}{2}$:

$$\boxed{\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}.}$$

Rappelons maintenant la résolution des équations algébriques suivantes :

$$\cos\theta = \cos\theta_0 \iff \theta \equiv \theta_0\ [2\pi] \text{ ou } \theta = -\theta_0\ [2\pi],$$

$$\sin\theta = \sin\theta_0 \iff \theta \equiv \theta_0\ [2\pi] \text{ ou } \theta = \pi - \theta_0\ [2\pi],$$

et

$$\tan\theta = \tan\theta_0 \iff \theta \equiv \theta_0\ [\pi].$$

2.2 Opérations sur les points du plan

Ici rappelons que le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ orthonormé direct est fixé. Ainsi un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est identifié au point M de coordonnées (a,b), ainsi qu'au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Définition 2.2. *On définit deux opérations internes sur les couples de $\mathbb{R}^2$ par :*
- *addition*
$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$$
- *multiplication*
$$(a,b)\cdot(a',b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

On note $z = (a,b)$.

Propriétés de l'addition

— **Commutativité :**

$$\forall\,(z,z')\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ \ z+z'=(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')=(a',b')+(a,b)=z'+z$$

— **Associativité :**

$$\forall\,(z,z',z'')\in(\mathbb{R}^2)^3,\ \ (z+z')+z''=z+(z'+z'')$$

— **Élément neutre :**

$$\forall\,z\in\mathbb{R}^2,\ \ z+(0,0)=(0,0)+z=z$$

— **Opposé :**

$$\forall\,z=(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \ z+(-a,-b)=(0,0)$$

On note $-z=(-a,-b)$ l'opposé de z.

Propriétés de la multiplication (on omet le . quand il n'y a pas d'ambiguité)

— **Commutativité :**

$$\forall\,(z,z')\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ \ zz'=z'z$$

— **Associativité :**

$$\forall\,(z,z',z'')\in(\mathbb{R}^2)^3,\ \ (zz')z''=z(z'z'')$$

Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned}(z.z')\cdot z'' &= (aa'-bb',ab'+a'b)\cdot(a'',b'')\\ &= [(aa'-bb')a''-(ab'+a'b)b'',(aa'-bb')b''+(ab'+a'b)a'']\\ &= [a(a'a''-b'b'')-b(a'b''+a''b'),a(a'b''+a''b')+(a'a''-b'b'')b]\\ &= (a,b)\cdot(a'a''-b'b'',a'b''+a''b').\end{aligned}$$

— **Élément neutre :** Pour tout $z=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ on a

$$(1,0)(a,b)=(1a-0b,1b+0a)=(a,b)$$

Le nombre $(1,0)$ est élément neutre pour la multiplication.

— **Inverse :**

$$\forall\,z=(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\ \ z\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

On note alors le symétrique ou l'inverse de $z\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\frac{1}{z}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Cet élément est déterminé en posant $z=(a,b)$ et en cherchant $z'=(a',b')$ tel que :

$$zz'=(1,0)$$

soient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} aa'-bb' &=& 1\\ ba'+ab' &=& 0\end{array}\right.$$

Dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ l'équation en z $zz'=z''$ admet une solution unique $z=z''\frac{1}{z'}$ permettant de définir la division, $\frac{z''}{z'}$.

On conserve la propriété de distributivité par de la multiplication par rapport à l'addition, c'est à dire

$$\forall\,(z,z',z'')\in(\mathbb{R}^2)^3,\ \ z\cdot(z'+z'')=zz'+zz''$$

Proposition 2.3. *$\mathbb{R}$ peut être mis en bijection avec $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, l'axe des abscisses.*

On note $C' = \mathbb{R} \times \{0\}$ l'ensemble des couples de $\mathbb{R}^2$ de la forme $z = (a, 0)$ (point de l'axe des abscisses). Les lois $+$ et $\cdot$ restent internes à C', les éléments neutres sont dans C' et tout élément de C' possède un symétrique pour $+$ et . dans C'.

Si on considère application g de $\mathbb{R}$ dans C' définie par :

$$a \to g(a) = (a, 0)$$

Cette application est bijective, compatible avec l'addition et la multiplication, c'est à dire :

$$g(a + a') = (a + a', 0) = (a, 0) + (a', 0) = g(a) + g(a'),$$
$$g(aa') = (aa', 0) = (a, 0)(a', 0) = g(a)g(a').$$

Les couples de la forme $(a, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ peuvent être alors représentés par les nombres réels a. On notera par la suite :

$$(a, 0) = a,$$

et ainsi $(0, 0) = 0$ et $(1, 0) = 1$.

2.3 Nombres complexes

Il en résulte une nouvelle écriture pour les couple qui nous permet de définir les nombres complexes :

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (0, b)$$

On remarque :

$$(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = b(0, 1)$$

En introduisant le nombre complexe $(0, 1)$, que l'on nomme i, on obtient le représentation

$$\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \;\; z = (a, b) = a + bi.$$

Définition 2.4. *On définit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombre de la forme $z = a + bi$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*
a est appelé partie réelle de z : $a = \mathcal{R}e(z)$,
b est appelé partie imaginaire de z : $b = \mathcal{I}m(z)$.
De plus si $z = a + ib \neq 0$ alors $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$.

Proposition 2.5. *Le nombre i vérifie $i^2 = -1$.*

En effet on a $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

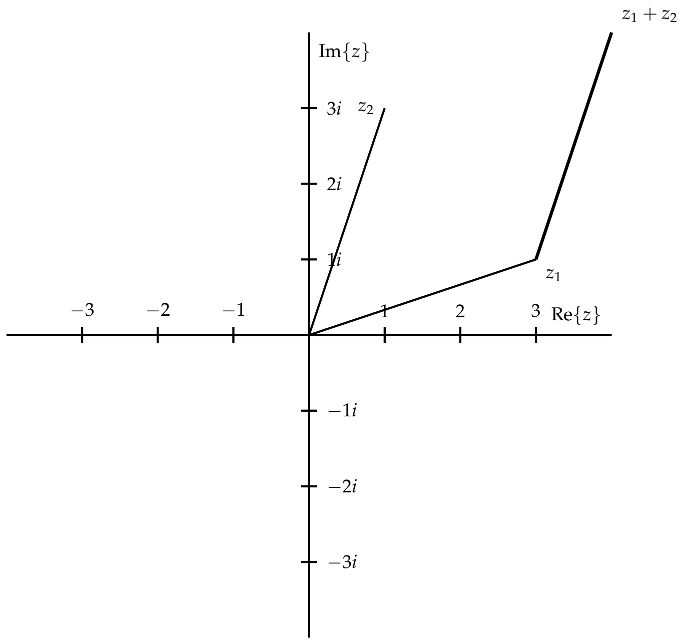
Les calculs dans $\mathbb{C}$ seront donc effectuées par la suite en utilisant la forme $z = a + bi$ (appelée forme algébrique de z) en tenant compte des propriété des opérations et de la propriété de i ci-dessus. Ceci permet de s'affranchir des définitions de l'addition et de la multiplication sur les couples pour n'utiliser que les règles de calcul de l'algèbre élémentaire.

L'addition de deux complexes $z = a + ib$ et $z' = a + ib'$ sera donc :

$$z + z' = a + a' + i(b + b')$$

La multiplication de deux complexes $z = a + ib$ et $z' = a + ib'$ sera donc :

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + i^2bb' + i(a'b + ab') = aa' - bb' + i(a'b + ab')$$



Par exemple si on a $z = 1 - i$ et $z' = 1 + 3i$. Alors on obtient

$$z + z' = 2 + 2i = 2(1 + i)$$

et

$$zz' = (1 - i)(1 + 3i) = 1 + 3i - i - 3i^2 = 1 + 3i - i + 3 = 4 + 2i = 2(2 + i).$$

De plus $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

Remarque 2.3.

— *Si $z \in \mathbb{C}$, $z = 0$ si et seulement si $\mathcal{R}e(z) = 0$ et $\mathcal{I}m(z) = 0$.*

— *On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (tout élément $a \in \mathbb{R}$ s'écrit $a = a + 0i \in \mathbb{C}$).*

— *Si $\mathrm{Re}\, z = 0$, on dit que z est imaginaire pur.*

— *L'ensemble des nombres complexes non nuls est noté $\mathbb{C}^*$.*

— *La formule du binôme est valide dans $\mathbb{C}$.*

Proposition 2.6. *(Unicité de l'écriture). Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont respectivement égales :*

$$z = z' \iff \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, z' \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, z'$$

2.3.1 Conjugaison

On introduit maintenant l'opération de conjugaison qui permet en particulier de déterminer les parties réelles et imaginaires d'un quotient.

Définition 2.7. *On appelle nombre complexe conjugué de $z = a + bi$ le nombre noté $\bar{z}$ défini par $z = a - bi$.*

On a alors la proposition suivante :

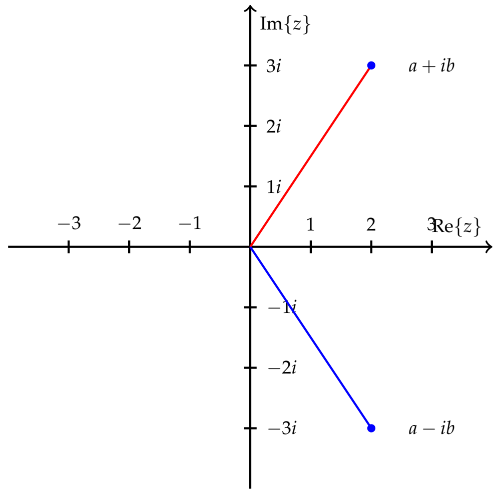


FIGURE 2.1 – ***Conjugué particulier***

Proposition 2.8. *On a pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$:*

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}',$$

et si $z \neq 0$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

On retrouve la partie réelle et la partie imaginaire en fonction de z et $\bar{z}$ en résolvant le système de deux équation à deux inconnues qui suit :

$$\begin{cases} z &= a + bi \\ \bar{z} &= a - bi \end{cases}$$

Soit :

$$a = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Si $z = a + bi \neq 0$ on utilisera le conjugué pour le calcul de $\frac{1}{z}$ de la façon suivante :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - bi)$$

2.4 Forme trigonométrique et représentation graphique

Rappelons encore que le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est fixé.

Définition 2.9. *A tout nombre complexe $z = a + bi \in \mathbb{C}$ on associe de façon unique le point M de coordonnées a et b et donc le vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Le point $M = (a, b)$ est appelé image de $z = a + ib$ alors que $z = a + ib$ est appelé affixe du point $M = (a, b)$.*

Définition 2.10. *On appelle* **module** *de $z = a + ib \in \mathbb{C}$ la quantité, notée $|z|$ définie par*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\overrightarrow{OM}\| \text{ où } \overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

On démontre facilement les deux propriété suivantes :

- $z\overline{z} = |z|^2$,
- $|\overline{z}| = |z|$.

Définition 2.11. *Pour un nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, affixe du point $M = (a, b)$, on définit* **l'argument** *de z par*
$$\arg(z) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) \quad [2\pi].$$
L'ensemble des argument de z sera de la forme : $\arg(z) = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. On écrira aussi $\arg z \equiv \theta[2\pi]$ pour exprimer que l'argument est déterminé à 2π près.

De façon algébrique pour $z \neq 0$ de module r, **un argument** *de z sera donc un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ qui vérifie :*
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r}. \end{cases}$$
Le choix de l'angle dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, est appelé **argument principal de** *z.*

Remarque 2.4. *L'argument principal n'a pas une acception universelle. On peut trouver également en définition l'intervalle $[0, 2\pi[$.*

Prenons, par exemple, $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On retrouve des valeurs caractéristiques du tableau. Observons d'abord que $|z| = 1$. On remarque ensuite que $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$. Comme le signe devant la partie imaginaire est négatif et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on en déduit que $\arg z \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi
$$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3).$$

Ainsi, d'après les définitions introduites dans la première section, si, pour un nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on note
$$r = |z| \text{ et } \theta \equiv \arg(z) \quad [2\pi],$$
alors
$$\mathcal{R}e(z) = r\cos(\theta) \text{ et } \mathcal{I}m(z) = r\sin(\theta),$$
de sorte que
$$z = \mathcal{R}e(z) + i\mathcal{I}m(z) = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right).$$
L'écriture précédente définit **la forme trigonométrique** du nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Définition 2.12. *Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ alors $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ est appelé* **forme trigonométrique** *du nombre $z \neq 0$.*

Le couple (r, θ) est appelé aussi les **coordonnées polaires** *de z.*

On remarque que les complexes de module 1 sont le cercle unité.

Proposition 2.13. *M est un point du cercle unité si et seulement si son affixe $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Remarque 2.5. *Si $z = 0$, $|z| = 0$ mais $\arg(z)$ n'est pas défini.*

Le résultat suivant décrit le comportement du module et de l'argument par rapport à la multiplication :

Théorème 2.14. *Le produit de 2 nombres complexes a pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned} &|zz'| = |z||z'|, \ \forall z, z' \in \mathbb{C}, \\ &\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi], \ \forall z, z,' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Démonstration.
Module : Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Alors

$$zz' = \left(aa' - bb'\right) + i\left(ab' + a'b\right).$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} |zz'|^2 = \left(aa' - bb'\right)^2 + \left(ab' + a'b\right)^2 &= (aa')^2 + (bb')^2 + (ab')^2 + (a'b)^2 \\ &= \left(a^2 + b^2\right)\left(a'^2 + b'^2\right) = |z|^2|z'|^2 = \left(|z||z'|\right)^2. \end{aligned}$$

Puisque les modules sont positifs, on en déduit la formule souhaitée.
Arguments : Pour démontrer la formule des arguments, nous allons utiliser la forme polaire. On considère deux nombres complexes $z, , z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On note

$$r = |z|, \ r' = |z'| \text{ et } \theta = \arg(z), \ \theta' = \arg(z'),$$

de sorte que $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} zz' &= rr'\left[\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\right) + i\left(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta\right)\right] \\ &= rr'\left[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\right]. \end{aligned}$$

Ainsi $\arg(zz') = \theta + \theta'$ $[2\pi]$. □

Voici des propriétés de calcul de de l'argument d'un complexe $z = a + ib$

— si z est réel ($b = 0$) et $a > 0$: $\arg(z) \equiv 0[2\pi]$,
— si z est réel ($b = 0$) et $a < 0$: $\arg(z) \equiv \pi[2\pi]$,
— si z imaginaire pur ($a = 0$) et $b > 0$: $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$,
— si z imaginaire pur ($a = 0$) et $b < 0$: $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$,

Voici des propriétés sur le module et l'argument d'un complexe et sur le quotient de deux complexes :

Propriétés 2.15.

- ⋆ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $z \neq 0$,
- ⋆ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$,
- ⋆ $\arg\frac{1}{z} \equiv -\arg z$ $[2\pi]$, $z \neq 0$,
- ⋆ $\arg\bar{z} \equiv -\arg z$ $[2\pi]$, $z \neq 0$,
- ⋆ $\arg(-\bar{z}) \equiv \pi - \arg z$ $[2\pi]$, $z \neq 0$,
- ⋆ $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z$ $[2\pi]$,
- ⋆ $\arg\frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'$ $[2\pi]$, $z \neq 0$, $z' \neq 0$.

Conséquence :

Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$, alors

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.}$$

D'après le théorème précédent, on obtient pour chaque entier n :

$$\begin{aligned}&|z^n| = |z|\dots|z| = |z|^n,\\ &\arg(z^n) = \arg(z) + \dots + \arg(z) \equiv n\arg(z)\ [2\pi].\end{aligned}$$

On obtient également le module et argument de l'inverse. On a vu que tout nombre complexe z, non nul, possédait un inverse $1/z$ et on a :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)\ [2\pi].$$

Théorème 2.16. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :*

$$|\mathcal{R}e(z)| \leq |z| \text{ et } |\mathcal{I}m(z)| \leq |z|.$$

De plus, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ l'inégalité triangulaire est satisfaite, c'est à dire :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

avec égalité si et seulement si il existe $\lambda \in [0, \infty[$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.

Remarque 2.6. *D'un point de vu géométrique, l'inégalité triangulaire se traduit par : si A, B et C sont trois points du plan alors, puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, par*

$$\|\overrightarrow{AB}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\|.$$

Démonstration. Si $z = a + ib$ alors on a $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ et $|b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, ce qui démontre les deux premières inégalités.
Pour l'inégalité triangulaire, on a

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\,(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2.$$

Or $\overline{\overline{z_1}z_2} = z_1\overline{z_2}$ donc $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\mathcal{R}e(z_1\overline{z_2})$. Ainsi, on obtient

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathcal{R}e(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2.$$

Or $\mathcal{R}e(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1||z_2|$ et donc

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathcal{R}e(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Ceci démontre l'inégalité triangulaire. Par ailleurs, le cas d'égalité est obtenu si et seulement si

$$\mathcal{R}e(z_1\overline{z_2}) = |z_1||z_2|,$$

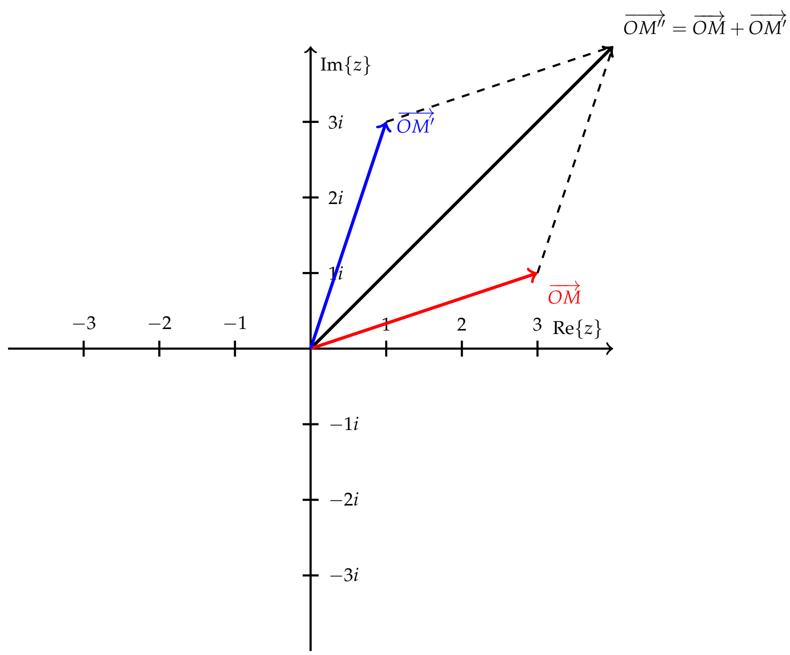
c'est à dire si et seulement si il existe $\alpha \geq 0$ tel que $z_1\overline{z_2} = \alpha$.
Ainsi si $z_2 = 0$ alors $z_2 = 0.z_1$ et si $z_2 \neq 0$ alors $z_1 = \frac{\alpha}{\overline{z_2}} = \frac{\alpha}{|z_2|^2}z_2$ et le résultat est démontré puisque $\lambda = \frac{\alpha}{|z_2|^2} \geq 0$.

$\square$

2.5 Interprétation géométrique des opérations

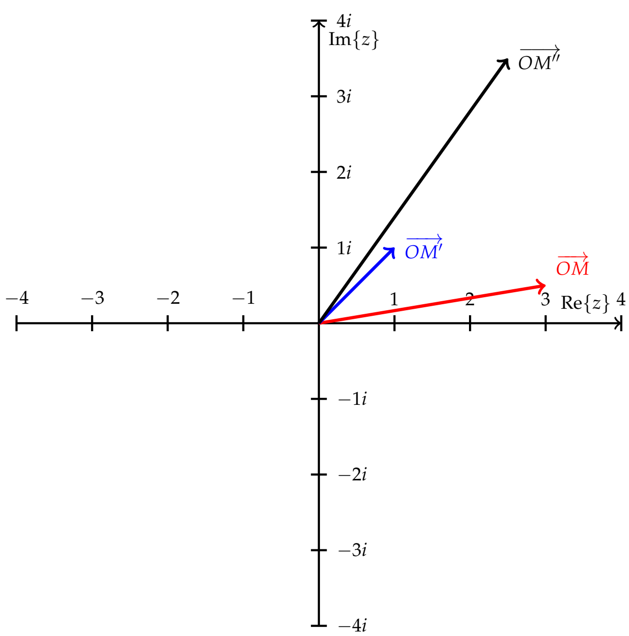
Les images M et M' de 2 nombres complexes conjugués sont évidemment symétriques par rapport à l'axe des abscisses Ox.

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes d'image $M = (a, b)$ et $M' = (a', b')$. Alors $z'' = z + z'$ est l'affixe du point M'' tel que $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. L'addition complexe correspond à l'addition des vecteurs.



Pour interpréter la multiplication, considérons deux complexes z, z' non nuls affixes des points M et M'. Alors le produit zz' est l'affixe du point M'' tel que

$$OM'' = OM \times OM' \text{ et } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM''}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) \ [2\pi].$$



Si on veut faire une homothétie de rapport λ d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ il suffira de calculer λz.
Si on veut faire une rotation d'angle α d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ il suffira de calculer :

$$z(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)).$$

Ainsi pour transformer z en $-z$ il suffit de remarquer :

$$-z = z(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$$

On utilise la rotation d'angle π.
Si A, B et C trois points deux à deux distincts du plan d'affixe z_A, z_B et z_C alors l'angle :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi].$$

On remarque également que : $\|\overrightarrow{AB}\| = |z_A - z_B|$.

2.6 Notation exponentielle

Notons maintenant que la propriété sur les arguments donne une propriété analogue à celle de l'exponentielle. Ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on introduit la notation exponentielle complexe définie par :

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}.$$

La propriété sur les arguments se réécrit

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}.$$

De plus si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, notons $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. Ainsi l'écriture trigonométrique $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ se réécrit en utilisant l'exponentielle complexe

$$z = re^{i\theta}.$$

Remarque 2.7. *On a en utilisant les propriétés de parité :*

$$\bar{z} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

De même en utilisant les règle de calcul d'un inverse :

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

Par exemple $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

De cette exponentielle complexe, on déduit en utilisant les formules qui donnent les parties réelles et imaginaires en fonction du complexe et de son conjugué les formules d'Euler :
Formules d'Euler : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Théorème 2.17. ***Formule de Moivre :*** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

On retiendra facilement ce théorème grâce à la notation exponentielle.

Démonstration. On fait une démonstration par récurrence. On va partir de $n = 2$.

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta)$$

En utilisant les formules de trigonométrie pour calculer $\cos(\theta + \theta)$ et $\sin(\theta + \theta)$ on obtient la validité de la formule pour $n = 2$.

On suppose la formule vraie à l'ordre n et on écrit pour l'ordre $(n + 1)$:

$$\begin{aligned}
(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{n+1} &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\
&= (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\
&= \cos(n\theta + \theta) + i\sin(n\theta + \theta) \\
&= \cos((n + 1)\theta) + i\sin((n + 1)\theta).
\end{aligned}$$

□

2.6.1 Linéarisation des puissances trigonométriques

On peut, grâce au binôme de Newton, linéariser des expression du type $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$. La linéarisation consiste à réécrire une expression du type $\cos^n\theta\sin^m\theta$ en fonction de sommes de termes de la forme $\cos(a\theta)$ et $\sin(b\theta)$.

On présente le calcul pour cos mais on peut faire la même chose pour le sinus en utilisant la formule d'Euler associée.

D'après la formule d'Euler de cos, on a :

$$\begin{aligned}
\cos^n(\theta) &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}e^{-i(n-k)\theta} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)\theta} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k - n)\theta)
\end{aligned}$$

Il suffit alors de calculer les coefficients du binôme $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ avec le triangle de Pascal et ne conserver que les termes réels. Il suffit de regrouper par parité les termes. Rappelons que si $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et pour $0 < k < n$ on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Ainsi le coefficient de la ligne n et colonne k s'obtient en ajoutant les coefficients de la ligne $n - 1$ et colonne $k - 1$ et de la ligne $n - 1$ et colonne k.

$$\cos^0(x) = 1$$

$$\cos^1(x) = \cos(x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\cos^3(x) = \frac{3\cos(x)}{4} + \frac{\cos(3x)}{4}$$

$$\cos^4(x) = \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{3}{8}$$

$$\cos^5(x) = \frac{5\cos(x)}{8} + \frac{5\cos(3x)}{16} + \frac{\cos(5x)}{16}$$

$$\cos^6(x) = \frac{15\cos(2x)}{32} + \frac{3\cos(4x)}{16} + \frac{\cos(6x)}{32} + \frac{5}{16}$$

Pour le sinus :

$$\begin{aligned}\sin^n(\theta) = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n}{2^n i^n} &= \frac{1}{2^n i^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{ik\theta}(-1)^{(n-k)}e^{-i(n-k)\theta}\\ &= \frac{1}{2^n i^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{(n-k)}e^{i(2k-n)\theta}\end{aligned}$$

Il suffit alors de calculer les coefficients du binôme $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ avec le triangle de Pascal et ne conserver que les termes réels. Il suffit de regrouper par parité ou imparité les termes suivant la valeur de i^n.

Si n est impair on aura des sinus et si n est pair on aura des cosinus. On aura de plus une alternance de signe de la somme résultat en supposant que la somme est ordonnée avec $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en premier. Les termes décroissent $k\theta$ décroissent de 2 én 2.

Si $n = 0[4]$ alors on a des cosinus et la somme alterne les signes en commençant par positif.
Si $n = 1[4]$ alors on a des sinus et la somme alterne les signes en commençant par positif.
Si $n = 2[4]$ alors on a des cosinus et la somme alterne les signes en commençant par négatif.
Si $n = 3[4]$ alors on a des sinus et la somme alterne les signes en commençant par négatif.

$$\sin^0(x) = 1$$

$$\sin^1(x) = \sin(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\sin^3(x) = \frac{3\sin(x)}{4} - \frac{\sin(3x)}{4}$$

$$\sin^4(x) = -\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{3}{8}$$

$$\sin^5(x) = \frac{5\sin(x)}{8} - \frac{5\sin(3x)}{16} + \frac{\sin(5x)}{16}$$

$$\sin^6(x) = -\frac{15\cos(2x)}{32} + \frac{3\cos(4x)}{16} - \frac{\cos(6x)}{32} + \frac{5}{16}$$

1													
1	1												
1	2	1											
1	3	3	1										
1	4	6	4	1									
1	5	10	10	5	1								
1	6	15	20	15	6	1							
1	7	21	35	35	21	7	1						
1	8	28	56	70	56	28	8	1					
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1				
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1			
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1		
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1

Triangle de Pascal

2.7 Racines d'un nombre complexe.

On se donne un complexe w et on cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 = w$

Proposition 2.18. *Pour tout nombre complexe $w = a + ib$ non nul avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, l'équation $Z^2 = w$ admet deux solutions opposées qui s'écrivent $Z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ avec*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Preuve :

$$(x + iy)^2 = a + ib \iff x^2 - y^2 = a \text{ et } 2xy = b.$$

On peut adjoindre également l'équation $|Z^2| = |w|$ ce qui donne $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. On voit alors qu'il y a exactement deux solutions obtenues en calculant x^2 et y^2 et en comparant les signes de x et y par l'équation $2xy = b$.

Remarque

Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Les solutions de l'équation $Z^2 = w$ sont appelées les **racines carrées** de w. (PAS D'ÉCRITURE $\sqrt{w}$ POUR CES DEUX SOLUTIONS.)

On peut aussi passer par la forme trigonométrique pour calculer cette racine. On va de nouveau résoudre $z^2 = w$ après avoir écrit sous forme trigonométrique $w = r_w e^{i\alpha_w}$ et posé $z = re^{i\alpha}$. L'équation devient :

$$r^2 e^{2i\alpha} = r_w e^{i\alpha_w}$$

on identifie modules et arguments pour trouver deux solutions :

$$z_k = \sqrt{r_w}\, e^{i\frac{\alpha_w + 2k\pi}{2}} = \sqrt{r_w} e^{i\frac{\alpha_w}{2} + k\pi},\ k = 0, 1$$

Soient :

$$z_0 = \sqrt{r_w} e^{i\frac{\alpha_w}{2}} \text{ et } z_1 = \sqrt{r_w} e^{i\frac{\alpha_w}{2}} e^{\pi} = -\sqrt{r_w} e^{i\frac{\alpha_w}{2}}$$

2.8 Équations polynômiales du second degré

Commençons par quelques rappels du lycée : Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue z où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation alors :

— Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule solution double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

— Si $\Delta < 0$ l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Notons que lorsque $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Le problème qui nous intéresse maintenant est de trouver z tel que

$$\boxed{az^2 + bz + c = 0}$$

où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ **sont des complexes donnés**. On a

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 \quad &\iff \quad z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \\ &\iff \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\iff \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0. \end{aligned}$$

Ceci implique la propriétés suivante

Proposition 2.19. *Soit $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.*

— *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule solution double $z = -\dfrac{b}{2a}$.*

— *Si $\Delta \neq 0$, notons δ et $-\delta$ ses racines carrées, l'équation admet deux solutions distinctes*

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

On peut signaler le cas particulier des polynômes à coefficients constants.

Théorème 2.20. *Si l'on a un polynôme de degré n à coefficients réels, il possède n racines (admis) et si une racine est complexe alors sa conjuguée est aussi racine.*

Démonstration.

$$P(z) = 0 \iff a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \iff \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \ldots + a_1 z + a_0} = 0$$

Et avec les propriétés du conjugué on a : $a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} \ldots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$ □

En particulier, **si** a, b, c **sont réels avec** $a \neq 0$, on obtient, comme corollaire, les formules suivantes en fonction du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$:

1. Si $\Delta > 0$ alors 2 racines réelles $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Si $\Delta = 0$ alors racine double réelle $z = -\frac{b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$ alors 2 racines complexes conjuguées $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Si z_0 est une racine d'un polynôme complexe, on pourra comme dans le cas réelle factoriser le polynôme par $(z - z_0)$.

Un peu plus loin dans les racines

0n va étendre le résultat de cours sur les racines carrées aux racine n-ièmes.

Proposition 2.21. *Soient $0 \neq w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $Z^n = w$ admet exactement n solutions distinctes appelées* **racines n-ièmes de** *w. Si w s'écrit sous forme trigonométrique $w = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$, alors les racines n-ièmes de w sont les complexes :*

$$\boxed{z_k = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad \text{avec } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}}.$$

Démonstration. Ecrivons Z solution de $Z^n = w$ sous sa forme trigonométrique $Z = re^{i\gamma}$. Alors

$$Z^n = w \iff (re^{i\gamma})^n = \rho e^{i\theta}.$$

Par la formule de Moivre on a alors

$$r^n e^{in\gamma} = \rho e^{i\theta}$$

autrement

$$r^n = \rho \quad \text{et} \quad n\gamma = \theta + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, Z s'écrit

$$Z = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

Cela fait n complexes distincts que l'on obtient en donnant à k les valeurs de n entiers successifs par exemple $0, \dots, n-1$ ou encore $1, \dots, n$ etc. $\square$

3

Fonctions

3.1 Généralités sur les fonctions

— On appelle *fonction d'une variable réelle à valeurs réelles*, ou encore, *fonction numérique*, une *application* d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, autrement dit une correspondance entre les éléments de D et ceux de $\mathbb{R}$ telle que tout élément de D à une seule image.

— La partie D est appelée **ensemble de définition** de la fonction. En général, D est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

— La phrase générique « Soit f une fonction réelle définie sur D » signifie que f est une application de D dans $\mathbb{R}$.

— Comme exemples de fonction définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$. La fonction $f : x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$.

Définition 3.1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

— *f est* **majorée** *si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M$.*

— *f est* **minorée** *si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geq m$.*

— *f est* **bornée** *si elle est minorée et majorée. Cela équivaut à : $\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leq A$*

3.2 Limite

3.2.1 Limite d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ signifie que "tout intervalle contenant ℓ, contient $f(x)$ pour x assez proche de x_0". Plus précisément

Définition 3.2. *(Limite finie en un point) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$ ou l'une des extrémités de I. On dit que ℓ est limite de f en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Remarque.

1. L'ordre des quantificateurs est important et on ne peut pas échanger $\forall \varepsilon$ avec $\exists \delta$: le δ dépend du ε.

2. L'inégalité $|x - x_0| \leq \delta$ équivaut à $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. L'inégalité $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \epsilon]$.

3. Si x_0 est un point de I et si f admet une limite finie en x_0, alors nécessairement cette limite est égale à $f(x_0)$.

Définition 3.3. *(limite infinie en un point) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ ou l'une des extrémités de I.*

— *On dit que $+\infty$ est limite de f en x_0 si*

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq M.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

— *On dit que $-\infty$ est limite de f en x_0 si*

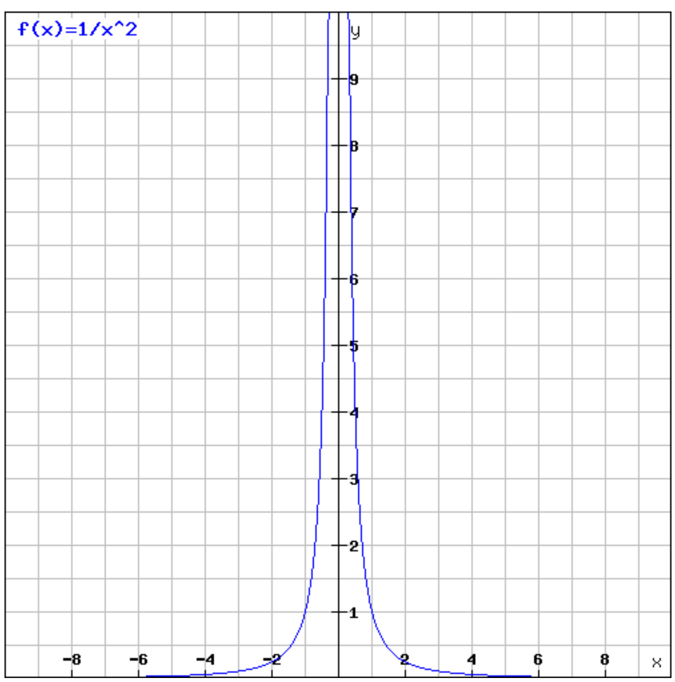
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \leq M.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

— $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut quand x est assez proche de x_0.

On dit alors que la droite d'équation $x = x_0$ est *asymptote verticale* à la courbe représentative de la fonction f.

— Exemple : On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.



Proposition 3.4. **(Unicité de la limite)**. *Si f admet ℓ et ℓ' pour limites en x_0, alors $\ell = \ell'$.*

3.2.2 Limite d'une fonction en l'infini

Définition 3.5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a, +\infty[$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

— *On dit alors que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \qquad x \geq B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

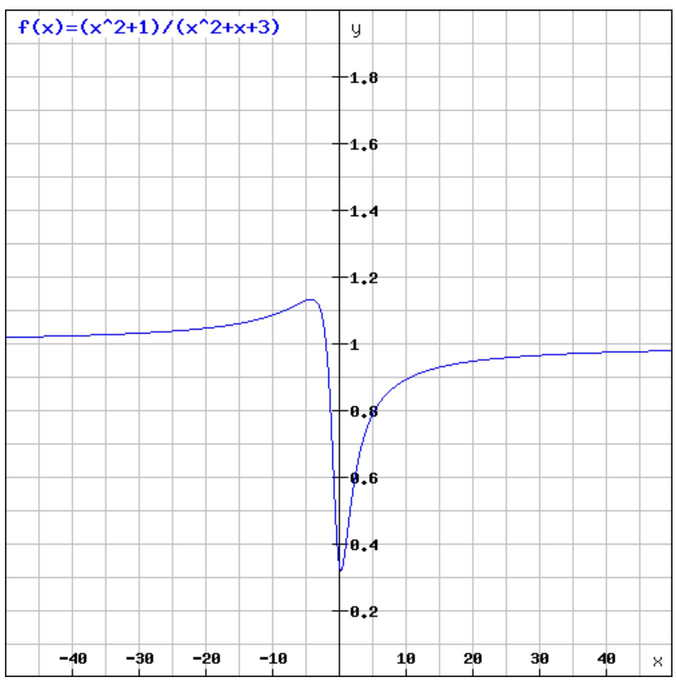
On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

— *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si*

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \qquad x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ signifie $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut quand x est suffisamment grand.
On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* à la courbe représentative de la fonction f.
Par exemple $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2+x+3} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2+x+3} = 1$. (Voir ci-dessous)



— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie , $f(x)$ est aussi grand que l'on veut lorsque x est suffisamment grand.

— On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour les fonctions définies sur des intervalles de type $] - \infty, a[$.

— Exemple de référence : Soit $n \geq 1$ et $m \geq 1$. Nous avons

  — $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$,

  — $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair ,} \\ -\infty & \text{si n est impair,} \end{cases}$

— $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$,
— $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to+\infty} x^{n-m} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n > m \\ 1 & \text{si} \quad n = m \\ 0 & \text{si} \quad n < m \end{cases}$
— Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et
$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots b_1 x + b_0$ avec $b_m \neq 0$, alors

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x^m}}.$$

Ceci ne s'applique pas lorsque $x \to 0$, seulement lorsque $x \to +\infty$.

3.2.3 Limite à gauche et à droite

Il arrive que le comportement local d'une fonction f soit différent à gauche d'un point x_0 (c'est à dire pour $x < x_0$) et à droite de x_0 (c'est à dire $x > x_0$). Nous sommes donc amenés à introduire les notions de limites à gauche et à droite :

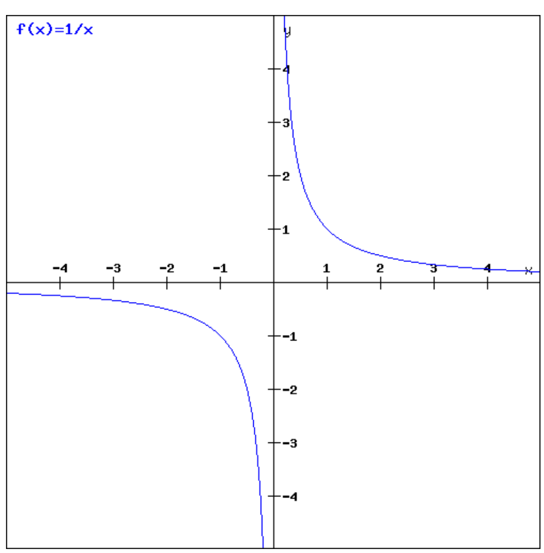
Définition 3.6. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I (de la forme $]a, x_0[$, $]x_0, b[$ ou $]a, x_0[\cup]x_0, b[$) . Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

— *On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en x_0 si la restriction de f à $]a, x_0[$ admet ℓ pour limite en x_0.*
On note alors $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$

— *On dit que f admet l pour limite à droite en x_0 si la restriction de f à $]x_0, b[$ admet ℓ pour limite en x_0.*
On note alors $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$

On note aussi $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ par $\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ par $\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$.

Exemple : $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



3.2.4 Opérations sur les limites

Opérations algébriques Cas des limites finies.

Soient f et g deux fonctions admettant des limites finies en a, alors :

1. $f+g$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. fg admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\ \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. Pour tout réel λ, λf admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda \lim\limits_{x\to a} f(x)$
4. Si de plus la limite de g est non nulle, $\frac{f}{g}$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
5. Si f admet l comme limite en a, alors $|f|$ admet $|l|$ comme limite en a.

Composition des limites.

Définition 3.7. *Soient deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On définit la composée de f par g noté $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ par*

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in I.$$

Soit la fonction $f : x \to x-1$ pour $x \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $g : x \to \ln x$ définie sur $]0,+\infty[$. La fonction $f \circ g(x) = \ln(x-1)$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais seulement sur $]1,+\infty[$.

Théorème 3.8 (Théorème de la limite composée)**.** *Soient deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$ ou l'une des extrémités de I et soit $b \in J$ ou l'une des extrémités de J. Alors*

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} g(x) = \ell, \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell,$$

a, b et ℓ peuvent être finis ou infinis.

Opérations algébriques. Cas des limites infinies.

1. Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f+g) = +\infty$.
2. Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = -\infty$, alors $\lim(f+g) = -\infty$.
3. Si $\lim f = +\infty$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f+g) = +\infty$.
4. Si $\lim f = \ell \neq 0$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(fg) = +\infty$ si $\ell > 0$, ou $\lim fg = -\infty$ si $l < 0$.
5. Si $\lim f = \ell \neq 0$ et $\lim g = -\infty$, alors $\lim(fg) = -\infty$ si $\ell > 0$, ou $\lim(fg) = +\infty$ si $l < 0$.
6. Si $\lim f = +\infty$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f\,g) = +\infty$.
7. **Formes indéterminées** : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}

3.2.5 Théorèmes sur les limites

Théorème 3.9.

— *Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq A$, alors $\ell \leq A$.*

— *Si $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.*

— *(Théorème des gendarmes) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$, alors g admet aussi une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$*

— *Si $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.*

— *Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.*

Remarque.

1. Les inégalités strictes ne sont pas conservées *par passage à la limite*. Par exemple $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x^2} > 0$ mais $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{1+x^2} = 0$. En effet, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et puisque $1+x^2 > 0$, on a alors pour tout x
$$\frac{-1}{1+x^2} \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$
Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, le théorèmes des gendarmes (appelé aussi Théorème d'encadrement) nous donne le résultat.

3.3 Continuité

Dans cette partie I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

3.3.1 Définitions

Définition 3.10. *Soient f une fonction définie sur $]a,b[$ et $x_0 \in]a,b[$. On dit que f est continue en x_0 si*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
On dit que f est continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout point x_0 de $]a,b[$.

Remarques

1. Notons que f est continue en x_0 est équivalent à
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$
2. La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point, alors elle n'est pas nulle autour de ce point.
3. Comme exemples de fonctions continues : $x \to x^2$, $x \to e^x$, $x \to \cos(x)$, $x \to \sin(x)$, $x \to |x|$, $x \to \ln x$ sur $]0,+\infty[$, $x \to \sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$

Propriétés 3.11.

1. *Si f et g sont continues en x_0, alors $f+g$ et fg sont continues en x_0.*
2. *Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.*
3. *Si f est continue en x_0, alors, pour tout réel λ, λf est continue en x_0.*
4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en $x_0 \in I$ et si g est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

3.3.2 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème 3.12 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles. Soient $a, b \in I$ et m un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in I$, $a \leq c \leq b$ tel que $f(c) = m$.*

Exemple

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Si $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ alors il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$

3.4 Dérivabilité

Dans cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

3.4.1 Définitions

Définition 3.13. *Soient $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et appelée dérivée de f en x_0.

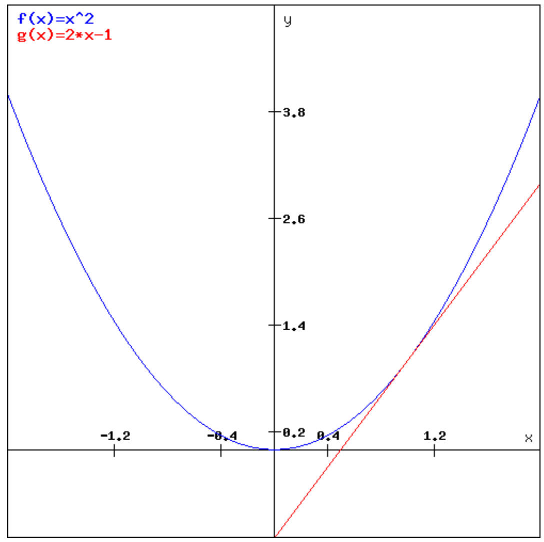
Définition 3.14. *f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.*

Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert inclus dans I. On dit que f est dérivable sur $]a, b[$ si elle est dérivable en tout point x_0 de $]a, b[$.

La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f. Elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Remarques

1. (Rappel Lycée) La fonction $f : x \to x$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 1$. En effet
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$
donc
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1.$$
Ainsi $f(x) = x$ est dérivable et $f'(x) = 1$.
2. La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point de $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$. En effet
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}$$
donc
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0.$$
Ainsi $f(x) = x^2$ est dérivable et $f'(x) = 2x$.
3. Par changement de variable, on pose $x - x_0 = h$, $x \to x_0$ équivaut $h \to 0$, on a donc f est dérivable en x_0 si et seulement si
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
existe et est finie.
4. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par
$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).}$$
La valeur $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente.
Par exemple, soit $f : x \to x^2$, donnons l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(1, f(1))$. On a $f(1) = 1$ et puisque $f'(x) = 2x$ on a $f'(1) = 2$. Donc l'équation de la tangente au point $(1, f(1)) = (1, 1)$ est $y = f'(1)(x - 1) + 1 = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.



5. f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : \ I \to \mathbb{R}$ continue et nulle en x_0 telle que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Ce qui peut s'écrire pour tout h tel que $(x_0 + h) \in I$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Quelques dérivées de fonction classiques à connaître :

f	f'
constante	0
$x^n, \quad n \geq 1$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$	$\frac{-1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ pour $x \neq 0\,, \quad n \geq 1$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}, \quad x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x, \quad x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Définition 3.15. — *f est dérivable à droite en x_0 si $f_{|[x_0,+\infty[\cap I}$ est dérivable, autrement dit si*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_d(x_0)$ et appelée dérivée de f à droite en x_0. (f est alors continue à droite en x_0.)

— *f est dérivable à gauche en x_0 si $f_{|]-\infty,x_0]\cap I}$ est dérivable, autrement dit si*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_g(x_0)$ et appelée dérivée de f à gauche en x_0. (f est alors continue à gauche en x_0).

— *Soit $[a,b]$ inclus dans I. On dit que f est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.*

Proposition 3.16. *Soit f définie sur $]a,b[$ et soit $x_0 \in]a,b[$. f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

Exemple Soit la fonction $f : x \mapsto |x|$. On a $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$ et donc f n'est pas dérivable en 0.

3.4.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 3.17.

1. *Si f et g sont dérivables en x_0, alors $f+g$ est dérivable en x_0. On a*
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
2. *Si f et g sont dérivables en x_0, alors fg est dérivable en x_0. On a*
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$
3. *Si g est dérivable en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0. On a*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$
Si f sont dérivables en x_0 alors f/g est dérivable en x_0 et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$
4. *Si f est dérivable en x_0, alors, pour tout réel λ, λf est dérivable en x_0. On a*
$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$
5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0. On a*
$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Application de dérivation de fonctions composées

f	f'
$f(x) = v \circ u(x) = v(u(x))$	$u'(x)v(u(x))$
$u(x)^n, \quad n \geq 1$ Exemple : $(ax+b)^n$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$ $na(ax+b)^{n-1}$
$\dfrac{1}{u(x)}, \quad u(x) \neq 0$	$\dfrac{-u'(x)}{u(x)^2}$
$\dfrac{1}{u(x)^n}, \quad u(x) \neq 0 \quad n \geq 1$	$\dfrac{-nu'(x)}{u(x)^{n+1}}$
$\sqrt{u(x)}, \quad u(x) > 0$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(u(x)), \quad u(x) > 0$ Exemple : $\ln(ax^2+b), \quad ax^2+b > 0$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ $\dfrac{2ax}{ax^2+b}$
$\cos(u(x))$ Exemple : $\cos(ax+b)$	$-u'(x)\sin u(x)$ $-a\sin(ax+b)$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$

3.4.3 Propriétés des fonctions dérivables

Croissance , décroissance et bijections.

Définition 3.18. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

- *f est croissante sur I si $\forall x, y \in I, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.*
- *f est strictement croissante sur I si $\forall x, y \in I, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.*
- *f est décroissante sur I si $\forall x, y \in I, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.*
- *f est strictement décroissante sur I si $\forall x, y \in I, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.*
- *f est monotone sur I si f est croissante ou décroissante.*
- *f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Proposition 3.19. *Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

1. *f est croissante (resp. décroissante) sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).*
2. *Si f vérifie $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0$ (resp. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0$) alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a,b]$.*
3. *Si f est dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\forall x \in]a,b[$ $f'(x) = 0$, alors f est constante sur $[a,b]$.*

Définition 3.20. *Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et soit la fonction $f : I \to J$. On dit que f est une bijection de I sur J s'il existe une application $g : J \to I$ telle que*

$$g \circ f(x) = x, \ \ \forall x \in I \quad \text{et} \quad f \circ g(y) = y, \ \ \forall y \in J.$$

La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}.

Remarques

1. Lorsque f est bijective tout élément de y de J a un et un seul antécédent par f dans I.

2. Dans un repère orthonormé la courbe représentative de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice de celle de f.
3. $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$ est une bijection et $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ avec $f^{-1}(x) = x^2$.
4. $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ et $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ avec $f^{-1}(x) = e^x$.

Théorème 3.21. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle. Si f est continue et strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) alors f est une bijection de I dans l'intervalle image $J = f(I)$. Le fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et a le même sens de variation que f.*

(Admis ; sera démontré au second semestre.)

Théorème 3.22. *Soient $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application strictement monotone et continue sur I, dérivable en x_0. Alors l'application réciproque de f, $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable en $f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. Dans ce cas on a :*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

(Admis ; sera démontré au second semestre.)

Nous avons aussi la formulation équivalente suivante :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

3.5 Fonctions logarithme et exponentielle (rappels)

Il s'agit de réviser les fonctions déjà connues : logarithme et exponentielle.

3.5.1 Logarithme népérien

On admet l'existence du *logarithme népérien*, noté ln (ou log), l'unique fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont la dérivée est égale à $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Propriétés 3.23.

1. *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$
3. $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ *et* $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leq x - 1$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

A démontrer :
• Pour le 2 on considère la fonction $x \mapsto \ln(xy)$ qui a la même dérivée que $x \mapsto \ln x$.
• pour le 3 on utilise l'égalité $\ln 2^n = n \ln 2$ (déjà vu au lycée).

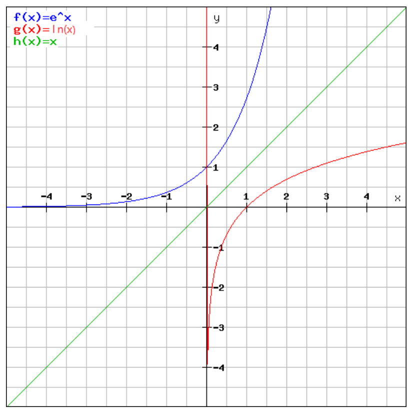
3.5.2 Exponentielle de base e

La fonction ln est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est appelée *exponentielle de base e* et est notée exp ou $x \mapsto e^x$.

Propriétés 3.24. — *La fonction* exp *est continue et strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$.

- *Elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = \exp(x)$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^{x+y} = e^x \, e^y$.
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Les courbes représentatives de $\ln x$ et e^x :



3.5.3 Fonctions puissances

Définition 3.25. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *on définit la fonction puissance* f_α *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}, \qquad x > 0.$$

On note : $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Proposition 3.26. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La fonction puissance* $x \to x^\alpha$ *est une fonction continue dérivable sur* $]0, +\infty[$ *de dérivée*

$$x \mapsto \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Propriétés 3.27. *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *et soient* $x > 0$ *et* $y > 0$ *alors*

1. $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.
2. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

Remarque

- Si $\alpha = n$, $n \geq 1$, on retrouve bien la fonction $x \mapsto x^n = \underbrace{x \times x \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$. En effet, lorsque $x > 0$ on a $e^{n \ln(x)} = e^{\ln(x^n)} = x^n$.
- Si $\alpha = \frac{1}{n}$ avec $n \geq 1$, on retrouve la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, qu'on appelle aussi la racine nième. Nous avons $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$. On appelle $x \mapsto x^{1/2}$ racine carrée, $x \mapsto x^{1/3}$ racine cubique.

Proposition 3.28. *$\forall \alpha > 0$ et $\forall \beta > 0$ on a*

1. $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & Si\ \alpha > 0 \\ 1 & Si\ \alpha = 0 \\ 0 & Si\ \alpha < 0 \end{cases}$
2. $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0^+ & Si\ \alpha > 0 \\ 1 & Si\ \alpha = 0 \\ +\infty & Si\ \alpha < 0 \end{cases}$

3.5.4 Croissances comparées

Proposition 3.29. *$\forall \alpha > 0$ et $\forall \beta > 0$ on a*

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^{\alpha}}{x^{\beta}} = 0$
2. $\lim_{x\to 0+} x^{\beta}|\ln x|^{\alpha} = 0$
3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} = +\infty$
4. $\lim_{x\to-\infty} |x|^{\beta}e^{\alpha x} = 0$

On peut dire que la fonction puissance impose sa limite à la fonction ln, et que la fonction exp impose sa limite à la fonction puissance en $+\infty$. Autrement dit, $(\ln x)^{\alpha}$ est négligeable devant x^{β} au voisinage de $+\infty$, etc. . .

3.6 Fonctions circulaires et leurs réciproques

Dans cette section il s'agit de réviser les fonctions circulaires et de découvrir de nouvelles fonctions : les fonctions circulaires réciproques.

3.6.1 Fonctions circulaires

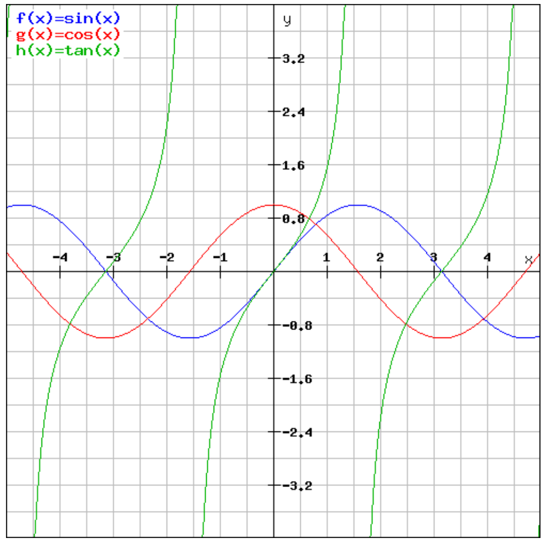
Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont supposées connues.

Propriétés 3.30.
- *La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire.*
- *La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire.*
- *La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, continue sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), π-périodique, impaire.*
- *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin)'(x) = \cos(x) \quad (\cos)'(x) = -\sin(x)$$

- *La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), et : $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.*

Courbes représentatives de $\sin x$ et $\cos x$ et $\tan x$



3.6.2 Fonctions circulaires réciproques

I- Arc sinus.

La restriction à $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$. C'est donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1,+1]$. La bijection réciproque est appelée *Arc sinus* et est notée $x \mapsto \arcsin x$.

Définition 3.31. *Pour tout* $x \in [-1,+1]$, $\arcsin x$ *est l'unique élément de* $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ *pour lequel le sinus est* x *:*

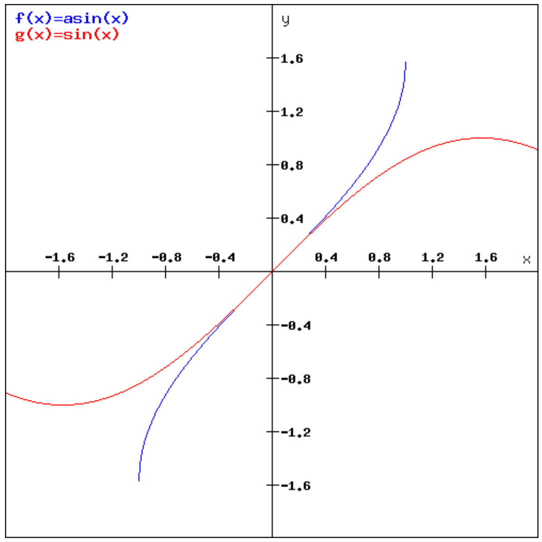
$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \arcsin x \\ x & \in & [-1,+1] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \sin y \\ y & \in & \left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

Propriétés 3.32. *La fonction* arcsin *est impaire.* arcsin *est continue et strictement croissante sur* $[-1,+1]$.

Elle est dérivable sur $]-1,+1[$ *et*

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Courbe représentative de $\sin x$ et $\arcsin x$:



II- Arc cosinus.

La restriction à $[0,+\pi]$ de la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,+\pi]$. C'est donc une bijection de $[0,+\pi]$ dans $[-1,+1]$. La bijection réciproque est appelée *Arc cosinus* et est notée $x \mapsto \arccos x$.

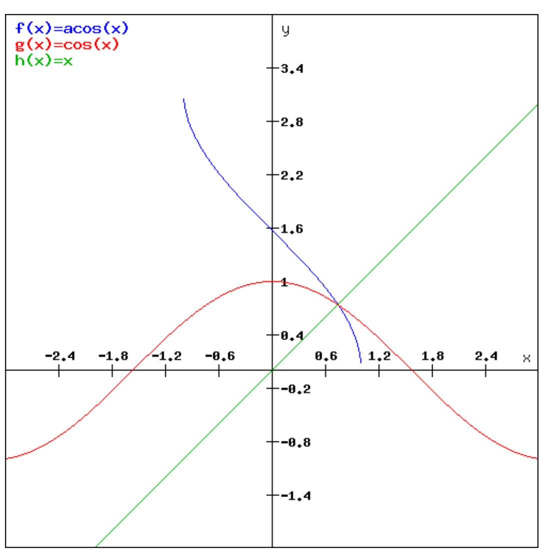
Définition 3.33. *Pour tout* $x \in [-1,+1]$, $\arccos x$ *est l'unique élément de* $[0,+\pi]$ *pour lequel le cosinus est* x *:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \arccos x \\ x & \in & [-1,+1] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos y \\ y & \in & [0,+\pi] \end{array}\right.$$

Propriétés 3.34. *La fonction* arccos *est continue et strictement décroissante sur* $[-1,+1]$.
Elle est dérivable sur $]-1,+1[$ *et*

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Courbe représentative de $\cos x$ et $\arccos x$.



III- Arc tangente.

La restriction à $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$. Ses limites aux bornes sont $+\infty$ et $-\infty$, en effet

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty.$$

C'est donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est appelée *Arc tangente* et est notée $x \mapsto \arctan x$.

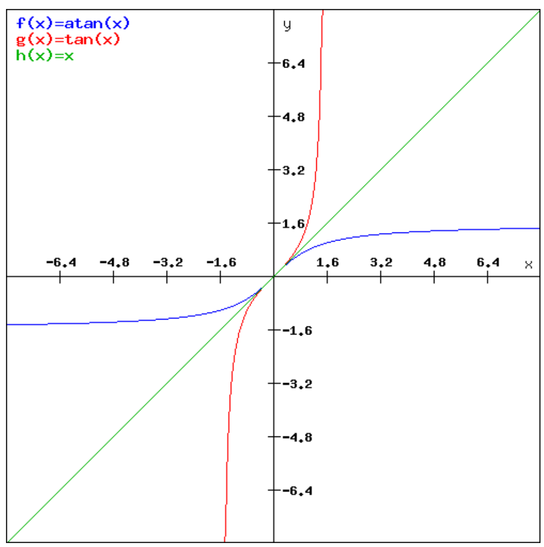
Définition 3.35. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ *est l'unique élément de* $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ *pour lequel la tangente est* x *:*

$$\begin{cases} y &= \arctan x \\ x &\in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \tan y \\ y &\in \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

Propriétés 3.36. *La fonction* $\arctan$ *est impaire.* $\arctan$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et*

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Courbe représentative de $\tan x$ et $\arctan x$.



4

Calcul intégral et équations différentielles

4.1 Intégration, calcul de primitives

4.1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$). On rappelle que le *graphe* de f l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient $x \in [a, b]$ et $y = f(x)$.

On suppose que la fonction f est positive. Le *sous-graphe* de f est l'ensemble

$$\mathrm{SG}\,(f) := \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}\,;\, 0 \leq y \leq f(x)\}\,.$$

Si on note par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f, le sous-graphe de f est délimité par $\mathcal{C}_f$, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses. Le sous-graphe d'une fonction continue positive sur un segment $[a, b]$ est un exemple très important d'ensemble que l'on sait mesurer.

Définition 4.1. *Soit f une fonction continue positive sur $[a, b]$ L'intégrale de a à b de la fonction f notée $\int_a^b f(x)dx$ est définie par l'aire du sous-graphe de f*

$$\int_a^b f(t)dt = \mathrm{Aire}\,(\mathrm{SG}(f)).$$

C'est l'aire délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Lorsque la fonction f est négative, le sous-graphe de f est l'ensemble

$$\mathrm{SG}\,(f) := \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}\,;\, f(x) \leq y \leq 0\}\,.$$

Définition 4.2. *Soit f une fonction continue négative sur $[a, b]$ L'intégrale de a à b de la fonction f notée $\int_a^b f(x)dx$ est définie par l'opposée de l'aire du sous-graphe de f*

$$\int_a^b f(t)dt = -\mathrm{Aire}\,(\mathrm{SG}(f)).$$

C'est l'aire délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Toute fonction réelle continue f sur un intervalle $[a, b]$ s'écrit comme la différence de deux fonctions positives continues sur $[a, b]$

$$f = f^+ - f^-$$

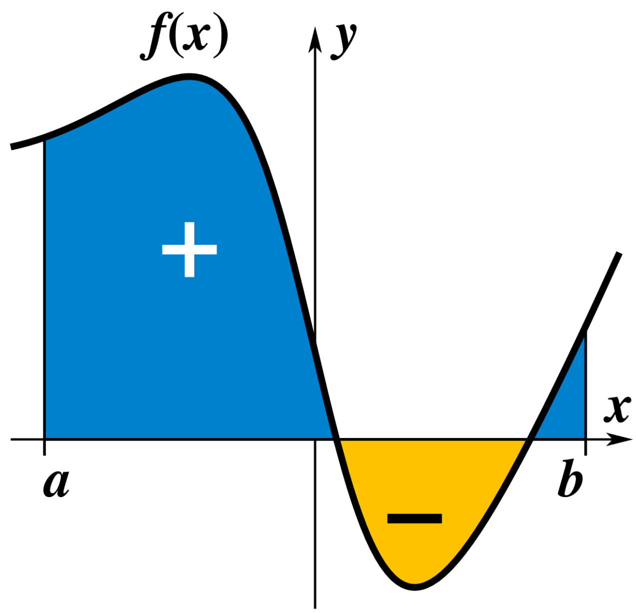
avec $f^+ := \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) := \sup(-f(x), 0)$[1]. Ceci nous permet de définir la notion

1. $\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } a \leq b \end{cases}$

d'intégrale de f sur $[a,b]$ (en remarquant que f s'écrit $f = f^+ - f^-$ sur $[a,b]$).

Définition 4.3. *Soit f est une fonction continue de $[a,b]$. L' intégrale de a à b de la fonction f sur $[a,b]$, notée $\int_a^b f(t)dt$ est définie par*

$$\int_a^b f(t)dt = \text{Aire}\left(\text{SG}\left(f^+\right)\right) - \text{Aire}\left(\text{SG}\left(f^-\right)\right).$$



On en déduit de cette définition la proposition suivante

Proposition 4.4. *Soient $a \leq b$ et f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Alors*

1. *(définition)* $\int_b^a f(t)\,dt := -\int_a^b f(t)\,dt$.
2. $\int_a^a f(t)\,dt = 0$.
3. $\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b (f(t) + g(t))\,dt$.
4. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.
5. *Relation de Chasles. Pour tout* α, β, γ *de* $[a,b]$
$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\gamma f(t)\,dt + \int_\gamma^\beta f(t)\,dt.$$
6. *si* $f \geq 0$ *sur* $[a,b]$ *alors* $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$.
7. *Si* $f \leq g$ *sur* $[a,b]$ *alors* $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.
8. *Si* $a \leq b$ *alors* $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Remarque

$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$ n'est pas vraie pour $b < a$.

4.1.2 Primitive d'une fonction continue

Définition 4.5. *F et f sont deux applications définies sur I. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et*

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Remarque

On peut trouver dans les livres la notation $\int f(x)dx$ pour désigner une primitive de f.

Théorème 4.6 (Théorème fondamental de l'analyse.)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et soit a un point de I.*

— *La fonction*

$$F\ : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f sur I ; c'est la primitive de f qui s'annule en a.

— *Pour toute primitive F_0 de f sur I, l'ensemble des primitives de f sur I est $\{F_0 + C\,;\, C \in \mathbb{R}\}$.*

D'où l'existence de la fonction ln admise au chapitre 7.

Corollaire 4.7. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. On suppose de plus que sa dérivée est continue sur I ($f \in \mathcal{C}^1(I)$). Si $[a, b] \subset I$, on a*

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)\,.$$

On utilisera la notation suivante $\big[f(x)\big]_a^b = f(b) - f(a)$. Une application majeure de ce résultat :

Formule d'intégration par parties.

Proposition 4.8. *Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à dérivées continues sur I ; on a, si $[a, b] \subset I$,*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = \big(f(b)g(b) - f(a)g(a)\big) - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Calculer $\int_1^2 \ln t dt$. On pose $g(t) = \ln t$ et $f'(t) = 1$ donc $g'(t) = \frac{1}{t}$ et $f(t) = t$. La formule d'intégration par parties nous donne

$$\int_1^2 \ln t\ dt = \Big[t\ln t\Big]_1^2 - \int_1^2 t \times \frac{1}{t}dt = 2\ln 2 - 1\ln 1 - \int_1^2 dt = 2\ln 2 - 1.$$

Remarque

4.1.3 Calculs d'intégrales et calculs de primitives

Voici un tableau regroupant les primitives des fonctions usuelles ; il est obtenu par une lecture inverse de celui des dérivées.

f	Primitive F	sur
$f(x) = 0$	$F(x) = c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = k$	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\|x\| + c$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x+a}, a \geq 0$	$F(x) = \ln\|x+a\| + c$	$]-\infty, -a[$ ou $]-a, +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + c$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan x + c$	$\mathbb{R}$

Utilisation des formules de dérivation

En inversant les formules de dérivation des fonctions composées, on aura le tableau suivant (attention, ces formules sont à comprendre sur des intervalles où les fonctions sont bien définies) :

f	primitive F
$f(x) = u'(x)v'(u(x))$	$F(x) = v(u(x)) + c = v \circ u(x) + c$
$f(x) = u'(ax+b)$	$F(x) = \dfrac{1}{a}u(ax+b) + c$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$F(x) = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)} + c$
$f(x) = u'(x) \times (u(x))^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{(u(x))^{n+1}}, \quad n \geqslant 1$ entier	$F(x) = \dfrac{-1}{(n+1)u(x)^n} + c$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = u'(x)u(x)^{-\frac{1}{2}}$	$F(x) = u(x)^{1/2} + c$
$f(x) = u'(x)u(x)^\alpha, \alpha \neq -1$	$F(x) = \dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln(u(x)) + c$
$f(x) = u'(x)\sin(u(x))$	$F(x) = -\cos(u(x)) + c$
$f(x) = u'(x)\cos(u(x))$	$F(x) = \sin(u(x)) + c$

Nota bene

Toutes les formules qui précédent ne sont que des cas particuliers de la première ligne : la primitive de $f(x) = u'(x)v(u(x))$ est $F(x) = v(u(x)) + c = v \circ u(x) + c$.

4.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

4.2.1 Introduction : Notion générale d'équation différentielle

C'est au début du XVII siècle, avec le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibniz, qu'apparut la notion d'équations différentielles. Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Au début du $XVIII$ siècle les méthodes classiques de résolution de certaines équations furent découvertes. Avec le développement de la mécanique, la résolution des équations différentielles devient une branche importante des mathématiques (grâce à Euler, Lagrange, Laplace ...).

En mathématiques, une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude ; en particulier, elles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. y désigne une fonction d'une variable réelle notée x (ou des fois t qui désigne le temps) définie sur I. On notera par y' la dérivée de y et par y'' sa dérivée seconde, $y''(x) = (y'(x))'$.

Une **équation différentielle** est une équation où interviennent une fonction inconnue y de la variable réelle x (parfois on prend aussi t) et une ou plusieurs de ses dérivées y', y'' etc ... ainsi qu'éventuellement la variable x elle-même.

Par exemple,

$$y'(x) = 2y(x), \quad y(x)y'(x) + x = 1, \quad (y'(x))^2 + y(x) + x = 0, \quad y''(x) = y'(x) - xy^2(x)$$

sont des équations différentielles sur $I = \mathbb{R}$. Souvent on note y' au lieu de $y'(x)$.

On dit qu'une équation différentielle est **du premier ordre (ou d'ordre 1)** si elle ne fait intervenir que la variable x, la fonction y et sa dérivée première y'. Les équations :

$$y' = y, \quad yy' + x = 1, \quad y' - xy = 0$$

sont des équations différentielles du premier ordre (sur $\mathbb{R}$).

Une équation différentielle **du second ordre** peut faire intervenir x, y, y' et y''. Par exemple : l'équation $y'' + xy' - y = 0$ est du second ordre.

Dans ce cours, nous nous limitons à l'étude des équations différentielles du premier ordre dites linéaires.

4.2.2 Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre

Terminologie

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient a et f deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies et continues sur I.

— Une **équation différentielle linéaire du premier ordre** (**ou d'ordre 1**) sur I est une équation de la forme :

$$\text{(E)} \quad y'(x) + a(x)y(x) = f(x).$$

La fonction y est l'inconnue de l'équation.

— On appelle **solution de** (E) toute fonction y définie et dérivable sur I et telle que :

$$\text{pour tout } x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = f(x).$$

— L'équation

$$\text{(H)} \quad y' + a(x)y = 0$$

est appelée **l'équation homogène associée à** (E).

Remarques

Lorsque l'intervalle I n'est pas précisé, c'est $\mathbb{R}$ tout entier.

Au lieu d'écrire l'équation (E) sous la forme $y' + a(x)y = f(x)$, on écrit parfois simplement $y' + ay = f$.

De même, l'équation homogène (H) s'écrit aussi $y' + ay = 0$.

Solution de l'équation homogène (H) : $y' + ay = 0$

Théorème 4.9. *Soit* $A(x) = \int a(x)dx$ *une primitive de* a *sur* I*. L'équation*

$$(\mathrm{H}) \quad y' + a(x)y = 0$$

admet une infinité de solutions : ce sont toutes les fonctions y_H *données pour tout* $x \in I$ *par*

$$y_H(x) = Ce^{-A(x)},$$

où C *est une constante réelle quelconque.*

Preuve : Comme la fonction a est continue sur l'intervalle I, elle y admet des primitives. Si A désigne l'une d'entre elles, alors A est dérivable sur I et $A'(x) = a(x)$. Puisque $e^A > 0$, y est solution de (H) si et seulement si $y' + ay = 0$ ce qui est équivalent à $(y' + ay)e^A = 0$. On a $(e^{A(x)})' = A'(x)e^{A(x)} = a(x)e^{A(x)}$, donc

$$\left(y(x)e^{A(x)}\right)' = y'(x)e^A + y(x)(e^{A(x)})' = (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)}.$$

Par suite : y est solution de (H) si et seulement si $\left(ye^A\right)' = 0$. Donc

$$\forall x \in I,\ \left(y(x)e^{A(x)}\right)' = 0 \Longleftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \ : \ \forall x \in I,\ y(x)e^{A(x)} = C.$$

Donc

$$y(x) = Ce^{-A(x)},$$

où C est une constante réelle quelconque.

Proposition 4.10. *Si* y_1 *et* y_2 *sont deux solutions de* (H) *alors pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$*,*

$$\alpha y_1 + \beta y_2$$

est encore une solution de (H)*.*

Remarque

Cette proposition est la traduction de la linéarité de l'équation.

Résolution de l'équation complète (E)

Théorème 4.11. *L'équation* (E) *admet une infinité de solutions.*
Si y_P *désigne une solution particulière de* (E) *alors toute solution* y_E *de* (E) *s'écrit pour tout* $x \in I$ *:*

$$y_E(x) = Ce^{-A(x)} + y_P(x),$$

où C *est une constante réelle quelconque.*
Autrement dit $y_E = y_H + y_P$ *: la solution générale de* (E) *est la somme de la solution générale de l'équation homogène* (H) *associée et d'une solution particulière de* (E)*.*

Remarque

Notons que les solutions de (E) dépendent d'un seul paramètre : la constante C.
Preuve : Comme y_P est solution de (E), on a : $f = y_P' + ay_P$. Donc y est solution de (E) si et seulement si

$$y' + ay = y_P' + ay_P,$$

donc $(y - y_P)' + a(y - y_P) = 0$ et $y - y_P$ solution de (H). Et on conclut via le Théorème 4.9.

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) $\quad y' + 2xy = 6x$.
On procède en 3 étapes.
$1^{ère}$ *étape :* Résolution de l'équation homogène associée

$$(\mathrm{H}) \quad y' + 2xy = 0.$$

Ici $a(x) = 2x$ admet pour primitive par exemple la fonction $A(x) = x^2$.
Donc la solution générale de (H) $y_H(x) = Ce^{-x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$ quelconque.
$2^{ème}$ *étape :* Recherche d'une solution particulière y_P de (E).
$y_P(x) = 3$ est une solution évidente puisque $y_P' = 0$ et donc $y_P' + 2xy_P = 0 + 2x \times 3 = 6x$.
$3^{ème}$ *étape :* Conclusion.
La solution générale de (E) est $y_E(x) = Ce^{-x^2} + 3$ avec $C \in \mathbb{R}$ quelconque.

Exemple

On considère l'équation différentielle : (E) $\quad y' - 6x^2 y = e^{2x^3}$.

a) Vérifier que la fonction g donnée sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{2x^3}$ est une solution de (E).
b) Puis résoudre (E).

Recherche d'une solution particulière de (E) **- Méthode de variation de la constante**

Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une solution évidente, on peut rechercher une solution particulière y de l'équation (E) $\quad y' + ay = f(x)$ sous la forme

$$y = C(x)e^{-A(x)},$$

c'est-à-dire ***en remplaçant*** *dans l'expression de la solution générale de* (H) ***la constante*** C ***par une fonction*** $C(x)$ *que l'on supposera dérivable (sur I).*
La recherche de cette solution y se ramène donc à celle de la fonction C.

Proposition 4.12 (Méthode de variation de la constante)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient a et f deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies et continues sur I. Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre* 1

$$(\mathrm{E}) \quad y' + a(x)y = f(x).$$

Soit $A(x) = \int a(x)dx$ une primitive de a. Alors une solution particulière de (E) *est donnée par :*

$$y_P(x) = C(x)e^{-A(x)}$$

où $C(x) = \int e^{A(x)} f(x)dx$ est une primitive de $e^{A(x)} f(x)$.

Preuve : Si $y_P(x) = C(x)e^{-A(x)}$ avec C et A comme ci-dessus, alors la fonction y_P est dérivable sur I et on a $\forall x \in I$

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= C'(x)e^{-A(x)} - C(x)A'(x)e^{-A(x)} \\ &= C'(x)e^{-A(x)} - a(x)y_P(x) \qquad A'(x) = a(x) \\ &= e^{A(x)} f(x)e^{-A(x)} - a(x)y_P(x) \qquad C'(x) = c(x) = e^{A(x)} f(x) \\ &= f(x) - a(x)y_P(x) \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in I$: $y_P'(x) + a(x)y_P(x) = f(x)$.

Exemple

On considère ici l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad y' + 2xy = e^{-x^2+3x}.$$

— Son équation homogène est

$$(\mathrm{H}) \quad y' + 2xy = 0.$$

C'est celle de l'Exemple 4.2.2 : elle admet pour solution générale

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_H(x) = Ce^{-x^2}$$

où $C \in \mathbb{R}$ constante quelconque.

— On cherche alors une solution particulière y_P de l'équation (E) sous la forme

$$\boxed{y_P(x) = C(x)e^{-x^2}}$$

où $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Alors on a

$$y'_P(x) = C'(x)e^{-x^2} - 2x.C(x).e^{-x^2}.$$

Ce qui nous donne :

$$y'_P(x) + 2xy_P(x) = C'(x)e^{-x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Or, y_P est solution de (E) ce qui signifie l'on a :

$$y'_P(x) + 2xy_P(x) = e^{-x^2+3x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Des équations (4.1) et (4.2), on déduit que

$$y_P = C(x)e^{-x^2} \text{ est solution de (E)} \iff C'(x)e^{-x^2} = e^{-x^2+3x}$$

Donc $C'(x) = e^{3x}$ et par suite $C(x) = \int e^{3x} = \frac{e^{3x}}{3} + K$.
On peut par exemple prendre

$$C(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$

et on en conclut que la fonction $y_P(x) = \dfrac{1}{3}e^{-x^2+3x}$ est une solution particulière de (E). La solution de l'équation (E) est donc

$$y(x) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{3}e^{-x^2+3x}.$$

Principe de superposition

Proposition 4.13 (Principe de superposition des solutions)**.** *Considérons deux équations différentielles linéaires définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ par*

$$(\mathrm{E}_1) \quad y' + a(x)y = f_1(x) \qquad \textit{et} \qquad (\mathrm{E}_2) \quad y' + a(x)y = f_2(x)$$

où a, f_1 et f_2 sont des fonctions définies et continues sur I.
Si y_{P_i} est solution particulière de de $(\mathrm{E_i})$ pour $i = 1, 2$. Alors

$$y_{P_1} + y_{P_2}$$

est une solution particulière de

$$(\mathrm{E}) \quad y' + a(x)y = f_1 + f_2.$$

Exemple

L'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad y' - 6x^2y = xe^{2x^3} + 12x^2$$

admet pour solution particulière

$$y_P(x) = xe^{2x^3} - 2.$$

En effet : d'une part , $y_{P_1}(x) = xe^{2x^3}$ est solution particulière de l'équation : $(\mathrm{E}_1) \quad y' - 6x^2y = xe^{2x^3}$.

D'autre part, la fonction $y_{P_2}(x) = -2$ est une solution évidente de l'équation

$$(\mathrm{E}_2) \quad y' - 6x^2y = 12x^2.$$

Le second membre de l'équation (E) étant la somme des seconds membres de (E_1) et (E_2), on conclut par le principe de superposition des solutions que la somme $y_{P_1} + y_{P_2}$ est une solution particulière de (E).

Problème de Cauchy-Lipschitz (Solution avec condition initiale)

La solution d'une équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre dépend d'une constante réelle (notée C dans le Théorème 4.11). Pour déterminer cette constante, il suffit de connaître une condition initiale c'est-à-dire la valeur de la solution en un point donné.

Définition 4.14. *Soient x_0 un point de I, y_0 un réel. On appelle problème de Cauchy le problème*

$$(\mathrm{C}) \begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

La condition $y(x_0) = y_0$ est appelée **donnée initiale ou encore condition initiale**.

Le problème (C) admet une solution unique. Nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.15 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** *Soient a et f deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :*

$$(\mathrm{E}) \quad y' + a(x)y = f(x).$$

Fixons $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution y de (E) qui vérifie la condition initiale : $y(x_0) = y_0$.

Preuve : D'après le Théorème 4.11, comme y est solution de (E), il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I, \quad y(x) = Ce^{-A(x)} + y_P(x)$.

Alors on a :

$$y(x_0) = y_0 \Longleftrightarrow Ce^{-A(x_0)} + y_P(x_0) = y_0 \Longleftrightarrow C = e^{A(x_0)}\left(y_0 - y_P(x_0)\right)$$

ce qui détermine la constante C.